Theorie des Gaussischen Pendels
mit Rücksicht
auf die Rotation der Erde.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

philosophischen Facultät

der

Universität Leipzig

eingereicht

von

Heinrich Samter
aus Grünberg in Schlesien.

Greifswald.
Druck von F. W. Kunike.
—
1886.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545809_0178

Vorwort.

Diese Arbeit verdankt einer Anregung meines hochgeehrten Lehrers, Herrn Prof. Bruns ihre Entstehung. Es sei mir gestattet, für die mannigfachen Winke zur Anfertigung derselben dem genannten Herrn an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

Der Verfasser.

Einleitung.

In der Sammlung der Göttinger Sternwarte befindet sich ein Instrument, das von Dr. Meyerstein nach den Angaben von Gauss 1853 zur Wiederholung des Foucault'schen Versuches ausgeführt wurde [1]).

Gauss schreibt darüber an A. von Humboldt: „In der letzten Zeit habe ich mich mit der Ausführung eines Apparates beschäftigt, um die Foucault'schen Versuche in anderer Gestalt auszuführen. Ich habe es bei diesen, sowie Foucault selbst, Secchi u. a. sie ausgeführt haben, als einen grossen Mangel betrachtet, dass dazu ein Local erfordert wird, wie es an wenig Orten zu Gebote steht;

---

1) Bruns in Hofmann, Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner Ausstellung. Braunschweig 1876, pag. 202. f. 2) Briefe zwischen A. v. H. und G. Leipzig 1877, pag. 66.

Secchi hatte, wenn ich nicht irre, eins von mehr als hundert Fuss, Foucault eines von mehr als 200, Garthe 134 u. s. w. Höhe. Mein Apparat ist in jedem Local anwendbar und zeigt schon jetzt die Einwirkung der Erdrotation nach kurzer Zeit auf das schlagendste; ich hoffe aber, da er jetzt noch unvollständig ist, die fehlenden Stücke vielleicht successive dahin zu bringen, dass alles in höchster Eleganz und Präcision erscheint."

Das Gaussische Pendel besteht aus einer massiven horizontal liegenden Linse und der in einer cardanischen Aufhängung befindlichen Pendelstange. Die Achsen der Aufhängung und der Pendelstange müssen sich natürlich in einem Punkte schneiden, der dem Aufhängepunkte des correspondirenden mathematischen Pendels entspricht [1]).

In der Sprache der analytischen Mechanik heisst das:

Der Apparat ist aus zwei starren Systemen materieller Punkte zusammengesetzt, von denen das eine sich um eine mit dem Erdkörper fest verbundene Achse bewegen kann, das andere aber um eine gegen die Erde bewegliche, mit dem ersten Systeme fest verbundene Achse drehbar ist. Von den beiden Achsen wird die erste möglichst horizontal gelagert, die zweite schneidet die erste unter einem rechten Winkel.

Im Folgenden soll die Bewegung des eben beschriebenen Instrumentes mit Rücksicht auf die Erdrotation untersucht werden. Dabei wird angenommen werden, dass die erste Achse eine geringe Neigung gegen die Normalebene zur Richtung der Schwerkraft habe, dass ferner die beiden Achsen sich nicht schneiden, sondern kreuzen, so zwar, dass der von ihnen eingeschlossene Winkel nicht genau gleich 90^0 ist.

Bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung werden wir in erster Näherung annehmen, dass die an das Instrument zu stellenden — im Vorhergehenden erwähnten — Anforderungen in Beziehung auf Präcision erfüllt seien, und werden diese Annahme erst in zweiter Näherung fallen lassen.

---

1) Bruns a. a. O. pag. 203.

§ 1.

Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung und erste Integration derselben.

1.

Legt man die ζ-achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems in die Richtung der Verticale an einem Orte mit der geographischen Breite φ, so dass die positive Seite derselben nach unten gekehrt ist, während die ξ-achse und die η-achse mit ihren positiven Seiten resp. nach Süden und Westen weisen, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien schweren materiellen Punktes in der Nähe des Anfangspunktes dieses Systemes, wenn n die Drehungsgeschwindigkeit der Erde bedeutet [1])

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2n\sin\varphi\,\frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 2n\sin\varphi\,\frac{d\xi}{dt} - 2n\cos\varphi\,\frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 2n\cos\varphi\,\frac{d\eta}{dt} + g \end{aligned}$$

Die Berücksichtigung der nach den bisherigen Forschungen geradlinigen und gleichförmigen Bewegung des Sonnensystems modificirt diese Gleichungen nicht; die Bewegung der Erde um die Sonne würde durch Verlegung des Coordinatenanfangs in den Mittelpunkt der Sonne und die Anbringung der Differenz der von jener auf den bewegten Körper und die Erde ausgeübten Beschleunigungen berücksichtigt werden. Diese Differenz ist von der Ordnung der Pendellänge, gemessen durch die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, kann also die Bewegung nicht merklich beeinflussen. Ferner ist in diesen Gleichungen die Schwerkraft als alle Teilchen des Apparates in gleicher Richtung und in gleichem Maasse beschleunigend vorausgesetzt, bei der entgegengesetzten Annahme erhielte man für die Schwerkraft eine complicirte Kräftefunction V, deren partielle Differentialquotienten bei Vernachlässigung ganz unbeträchtlicher Glieder lineare und bis auf das Glied g in $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ auch homogene Functionen von ξ, η, ζ sind, deren Coefficienten teils von der Krümmung der

---

1) vgl. u. a. Hansen Theorie der Pendelbewegung. Danzig 1853. pag. 12.

Erde überhaupt, teils von der Abplattung derselben abhängig sind und Potenzen des Erdradius im Nenner enthalten, teils aber dem Quadrate der Rotationsgeschwindigkeit der Erde proportional, also sehr klein sind. Hansen hat gezeigt, dass die Berücksichtigung aller dieser Glieder die Bewegung selbst langer Pendel in unmerklicher Weise beeinflusst.

Von den hingeschriebenen Gleichungen (1) ausgehend brauchen wir also nicht zu befürchten, für die Bewegung merkliche Glieder zu verlieren.

Da aber in diesen Gleichungen auch der Widerstand der Atmosphäre vernachlässigt ist, so gelten die zu erlangenden Resultate nur für die Bewegung des Pendels im luftleeren Raume.

Die u-achse eines zweiten rechtwinkligen Coordinatensystemes falle mit der gegen die Erde festen Achse des Gaussischen Pendels zusammen, die Projection ihrer positiven Seite auf die $\xi\eta$-ebene bilde mit der ξ-achse einen Winkel $\mathfrak{A}$, der im Sinne Süden — Westen — Norden — Osten — Süden gezählt der Bedingung

$$0^0 \leqq \mathfrak{A} < 180^0$$

genüge. Die w-achse liege in der durch die u- und ζ-achsen gelegten Ebene, und ihre positive Seite bilde mit der $+\zeta$-achse einen Winkel i, der der Bedingung

$$-90^0 < i < +90^0$$

genüge und positiv gerechnet werden möge, wenn die $+u$-achse oberhalb, negativ, wenn dieselbe unterhalb der $\xi\eta$-ebene fällt — unter der Bedingung, dass die Anfangspunkte beider Systeme zusammenfallen. Bei Hinzunahme dieser Bedingung ist jetzt das System der u, v, w eindeutig bestimmt, wenn man noch festsetzt, dass die Transformationsdeterminante der Coordinaten den Wert $+1$ habe. Setzen wir

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{u}_1 u + \mathfrak{v}_1 v + \mathfrak{w}_1 w \\ \eta &= \mathfrak{u}_2 u + \mathfrak{v}_2 v + \mathfrak{w}_2 w \\ \zeta &= \mathfrak{u}_3 u + \mathfrak{v}_3 v + \mathfrak{w}_3 w, \end{aligned} \tag{2}$$

so wird hiernach

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u}_1 = \cos i \cos \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{u}_2 = \cos i \sin \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{u}_3 = -\sin i \\ &\mathfrak{v}_1 = -\sin \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{v}_2 = \cos \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{v}_3 = 0 \\ &\mathfrak{w}_1 = \sin i \cos \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{w}_2 = \sin i \sin \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{w}_3 = \cos i \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung des auf der vorigen Seite in's Auge gefassten Punktes in Beziehung auf das zweite Coordinatensystem werden durch Differentiirung der Formeln (2) gefunden. Dadurch ergiebt sich

$$\mathfrak{u}_1 \frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{v}_1 \frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{w}_1 \frac{d^2w}{dt^2} =$$
$$-2n \sin\varphi \left(u_2 \frac{du}{dt} + \mathfrak{v}_2 \frac{dv}{dt} + \mathfrak{w}_2 \frac{dw}{dt} \right)$$

$$\mathfrak{u}_2 \frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{v}_2 \frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{w}_2 \frac{d^2w}{dt^2} =$$
$$2n \sin\varphi \left(\mathfrak{u}_1 \frac{du}{dt} + \mathfrak{v}_1 \frac{dv}{dt} + \mathfrak{w}_1 \frac{dw}{dt} \right)$$
$$-2n \cos\varphi \left(\mathfrak{u}_3 \frac{du}{dt} + \mathfrak{w}_3 \frac{dw}{dt} \right)$$

$$\mathfrak{u}_3 \frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{v}_3 \frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{w}_3 \frac{d^2w}{dt^2} =$$
$$g + 2n \cos\varphi \left(\mathfrak{u}_2 \frac{du}{dt} + \mathfrak{v}_2 \frac{dv}{dt} + \mathfrak{w}_2 \frac{dw}{dt} \right)$$

und wenn man fortan

$$\begin{aligned} 2n(\sin\varphi \cos i + \cos\varphi \sin i \cos \mathfrak{A}) &= e \\ 2n \cos\varphi \sin \mathfrak{A} &= f \\ 2n(\sin\varphi \sin i - \cos\varphi \cos i \cos \mathfrak{A}) &= k \end{aligned}$$

setzt, so erhält man durch Elimination aus dem vorletzten Gleichungssysteme

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= -e \frac{dv}{dt} - f \frac{dw}{dt} - g \sin i \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= e \frac{du}{dt} + k \frac{dw}{dt} \\ \frac{d^2w}{dt^2} &= f \frac{du}{dt} - k \frac{dv}{dt} + g \cos i \end{aligned}$$

Betrachtet man nicht mehr die Bewegung eines einzelnen Punktes, sondern diejenige eines Systemes, so hat man die letzten Gleichungen in den Ausdruck des d'Alembert'schen Principes einzusetzen, dessen Gestalt dadurch folgende wird:

$$\sum_i m_i \delta u_i \left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} + e \frac{dv_i}{dt} + f \frac{dw_i}{dt} \right)$$

$$+ \sum_i m_i \delta v_i \left(\frac{d^2 v_i}{dt^2} - e \frac{du_i}{dt} - k \frac{dw_i}{dt} \right)$$

$$+ \sum_i m_i \delta w_i \left(\frac{d^2 w_i}{dt^2} - f \frac{du_i}{dt} + k \frac{dv_i}{dt} \right) =$$

$$- g \sin i \sum_i m_i \delta u_i + g \cos i \sum m_i \delta u_i$$

Wir wollen zuvörderst die Bewegung des ersten — also des um die feste Achse drehbaren — Systemes materieller Punkte für sich betrachten und unter δu_i, δv_i, δw_i die Verrückung eines Punktes u_i, v_i, w_i desselben verstehen, so muss, damit die Verrückung eine virtuelle sei, für jeden einzelnen Punkt

$$\delta u_i = 0$$

sein, und wenn r_i die Länge eines vom Punkte u_i, v_i, w_i auf die u-achse gefällten Lotes, σ_i den Winkel bedeutet, den es mit der v-achse bildet, gezählt in einer zur vw-Ebene parallelen Ebene von der $+v$-achse nach der $+w$-achse hin, so ist

$$v_i = r_i \cos \sigma_i$$
$$w_i = r_i \sin \sigma_i$$

und wegen der Bedingungen des Systemes ist für alle Punkte desselben

$$\delta r_i = 0$$
$$\delta \sigma_i = \delta \sigma,$$

wo $\delta \sigma$ eine für alle Punkte des Systems constante Grösse bedeutet. Hiernach ist

$$\delta u_i = 0$$
$$\delta v_i = - r_i \sin \sigma_i \delta \sigma_i = - w_i \delta \sigma$$
$$\delta w_i = r_i \cos \sigma_i \delta \sigma_i = v_i \delta \sigma$$

in die Gleichung (4) des d'Alembert'schen Principes einzusetzen, die dadurch in die folgende übergeht

$$\delta \sigma \sum_i m_i \left\{ - w_i \left[\frac{d^2 v_i}{dt^2} - k \frac{dw_i}{dt} \right] + v_i \left[\frac{d^2 w_i}{dt^2} + k \frac{dv_i}{dt} \right] \right\}$$
$$= \delta \sigma g \cos i \sum_i m_i v_i$$

Hier geben die in k multiplicirten Glieder Null, weil nach den Bedingungen des Systems

$$w_i^2 + v_i^2 = r_i^2$$

constant ist, und ferner erhält man

$$v_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} - w_i \frac{d^2 v_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v_i \frac{dw_i}{dt} - w_i \frac{dv_i}{dt} \right) = r_i^2 \frac{d^2 \sigma_i}{dt_i};$$

ausserdem haben alle Punkte des Systems dieselbe Geschwindigkeit und Beschleunigung; bedeutet also σ einen bestimmten unter den Winkeln σ_i, so kann man die Gleichung des d'Alembert'schen Principes schreiben

$$\text{(A)} \qquad \delta\sigma \frac{d^2\sigma}{dt^2} \sum_i m_i r_i^2 = \delta\sigma g \sum_i m_i v_i \cos i$$

Bedeutet m_1 die Masse, v_1 die v-Coordinate des Schwerpunkts des ersten Körpers, T_1 sein Trägheitsmoment um die feste Achse, so wird diese Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \delta\sigma \frac{d^2\sigma}{dt^2} T_1 = \delta\sigma g \cos i \, m_1 v_1$$

Setzt man hierin $\frac{d\sigma}{dt} dt$ für $\delta\sigma$ und integrirt die Gleichung, so ergibt sich als Integral der lebendigen Kraft

$$\text{(B)} \qquad \tfrac{1}{2} T_1 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = h + g \cos i \, m_1 w_1,$$

wo h die Integrationsconstante, w_1 die w-Coordinate des Schwerpunktes, r_1 seinen Abstand von der Drehachse, σ_1 den ihm zugehörigen Winkel σ bedeuten.

2.

Den bisher gleichgiltigen Anfangspunkt O_1 der Coordinaten u, v, w nehmen wir auf der festen Drehungsachse dort an, wo sie von der gemeinsamen Senkrechten beider Drehungsachsen getroffen wird — in dem Specialfalle also, wo die Achsen sich schneiden, im Schnittpunkte beider. Den Punkt O_2, wo die gegen die Erde bewegliche Rotationsachse von der gemeinsamen Senkrechten getroffen wird, wählen wir zum Anfangspunkte eines gegen die Erde beweglichen Coordinatensystemes, dessen Achsen mit den drei Hauptträgheitsachsen des zweiten Systemes materieller Punkte zusammenfallen mögen.

Zur $+c$-achse wählen wir die in der Ruhelage des Apparates mit der ζ-achse nahe parallel und gleich gerichtete Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes, die Richtungen der beiden andern

Achsen bestimmen wir nur soweit, als wir annehmen, die a-achse sei diejenige des grössten Trägheitsmomentes, und die Determinante der Transformation dieses Systemes in eines der beiden andern habe den Wert $+1$. Wir setzen

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c \\ v &= \beta + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c \\ w &= \gamma + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c \end{aligned} \tag{5}$$

Hier ist nun, weil die Verbindungslinie der Anfangspunkte der letzten beiden Coordinatensysteme auf der u-achse senkrecht steht,

$$\alpha = 0 \tag{6a}$$

und, weil dieselbe Verbindungslinie eine constante Länge l hat,

$$\beta^2 + \gamma^2 = l^2 \tag{6b}$$

Nehmen wir ferner diejenige Seite der beweglichen Drehaxe als positiv an, welche in der Ruhelage mit der $+v$-achse den seinem absoluten Werte nach kleineren Winkel einschliesst, und nennen wir $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die Richtungscosinus derselben gegen die Achsen der a, b, c, so wird, weil nach den Bedingungen des Systemes der Winkel der beiden Rotationsachsen eine von $\frac{\pi}{2}$ wenig verschiedene constante Grösse haben soll, sein Cosinus

$$\mathfrak{a}_1 a_1 + \mathfrak{a}_2 a_2 + \mathfrak{a}_3 a_3 = \mathfrak{d}_1 \tag{6c}$$

sein, wo $\mathfrak{d}_1$ eine kleine constante Zahl sein wird.

Andererseits sind die Richtungscosinus der beweglichen Achse gegen diejenigen der v und w

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \beta_1 + \mathfrak{a}_2 \beta_2 + \mathfrak{a}_3 \beta_3 &= \mathfrak{d}_2 \\ \mathfrak{a}_2 \gamma_1 + \mathfrak{a}_2 \gamma_2 + \mathfrak{a}_3 \gamma_3 &= \mathfrak{d}_3 \end{aligned}$$

und, da die bewegliche Achse auf der Linie $O_1 O_2$ mit den Richtungscosinus 0, $\frac{\beta}{l}$, $\frac{\gamma}{l}$ senkrecht sein soll, so haben wir endlich

$$\frac{\beta}{l}(\mathfrak{a}_1 \beta_1 + \mathfrak{a}_2 \beta_2 + \mathfrak{a}_3 \beta_3) + \frac{\gamma}{l}(\mathfrak{a}_1 \gamma_1 + \mathfrak{a}_2 \gamma_2 + \mathfrak{a}_3 \gamma_3) = 0 \tag{6d}$$

Löst man die Gleichungen (6b) und (6d) nach β und γ auf und berücksichtigt, dass

$$(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)^2+(a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3)^2$$
$$=1-(a_1\alpha_1+a_1\alpha_2+a_3\alpha_3)^2=1-b_1^2$$

ist, so erhält man

$$\beta=\mp l\,\frac{a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3}{\sqrt{1-b_1^2}}$$

$$\gamma=\pm l\,\frac{a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3}{\sqrt{1-b_1^2}}$$ [1])

Die Entscheidung über das Vorzeichen lässt sich folgendermassen fällen.

Aus den eben hingeschriebenen Werten von β und γ ergibt sich

$$(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)\frac{\gamma}{l}-(a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3)\frac{\beta}{l}=\pm\sqrt{1-b_1^2}$$

und setzt man speciell $b_1=0$, so heisst das mit leicht verständlicher Bezeichnung

cos (bewegliche Achse, v-achse) . sin (v-achse, O_1O_2) + sin (bewegliche Achse, v-achse) cos (v-achse, O_1O_2) $=\pm 1$.

Hiernach ist das obere Zeichen zu wählen, wenn der Winkel

(bewegliche Achse, O_1O_2) $=90^0$

ist, das untere, wenn er gleich 270^0 ist. Zählt man aber die Winkel von der $+v$-achse nach der $+w$-achse, von dieser nach der $-v$ achse u. s. w. herum, so ist der fragliche Winkel gleich 90^0, wenn in der Ruhelage die bewegliche Achse unterhalb der festen Achse hinläuft, gleich 270^0, wenn in der Ruhelage die bewegliche Achse sich oberhalb der festen Achse befindet. Man kann aber auch immer das obere Zeichen festhalten, wenn man nur bestimmt, dass l im ersteren Falle positiv, im anderen negativ gerechnet werden soll. Dasselbe Kriterium soll auch dann noch gelten, wenn b_1 nicht genau Null ist.

3.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen führen wir die Eulerschen Grössen p, q, r ein. Es ist

---

1) Hier soll, wie im Folgenden überall, unter der Quadratwurzel ihr positiver Wert verstanden werden.

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{dt} \\
q &= \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt} \\
r &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Umgekehrt gelten bekanntlich die Formeln

(8)

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p_1 - \alpha_1 r & \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p \\
\dfrac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r & \dfrac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 q \\
\dfrac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q & \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r & \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p
\end{array}
$$

Zwischen den p, q, r besteht eine Bedingungsgleichung, die sich durch Differentiation der Gleichung (6c) unter Benutzung der eben hingeschriebenen Formeln in der Gestalt

$$
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0 \tag{9}
$$

ergibt. Es lassen sich auch die Variationen der Grössen α_1, α_2 etc. in analoger Form wie die Differentialquotienten durch drei Grössen p', q', r' ausdrücken, deren Ausdrücke aus denen der p, q, r hervorgehen, indem man statt der Differentialquotienten die Variationen der Grössen α_1, α_2 etc. schreibt. Sollen die Grössen p', q', r' eine virtuelle Verrückung darstellen, so müssen sie der Gleichung

$$
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0 \tag{10}
$$

genügen.

Durch Differentiation folgt aus den Gleichungen (5)

$$
\frac{du}{dt} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \tag{11}
$$

$$(11)\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

und analog gelten auch die Gleichungen

$$\delta u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

$$(12)\quad \delta v = -\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

$$\delta w = \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

Bevor wir die Gleichungen (11) nochmals differentiiren, betrachten wir allgemein einen Ausdruck von der Form

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

wo die $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{p}$ beliebige Constanten sein mögen.

Durch Differentiation folgt hieraus:

$$\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_2 r - \alpha_3 q & \alpha_3 q - \alpha_1 r_1 & \alpha_1 q - \alpha_2 p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -(\alpha_2 r - \alpha_3 q)(\mathfrak{l} r - \mathfrak{p} q) \\ -(\alpha_3 p - \alpha_1 r)(\mathfrak{p} p - \mathfrak{k} r) \\ -(\alpha_1 q - \alpha_2 p)(\mathfrak{k} q - \mathfrak{l} p) \end{matrix}$$

Berechnet man die Producte nach dem Multiplicationstheorem für Determinanten, so erkennt man, dass sich die Resultate in einfacher Weise addiren lassen, so dass der gesuchte Differentialquotient schliesslich wird

$$= \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p^2+q^2+r^2 & \mathfrak{k}p+\mathfrak{l}q+\mathfrak{p}r \\ \alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r & \mathfrak{k}\alpha_1+\mathfrak{l}\alpha_2+p\alpha_3 \end{vmatrix}$$

Analoge Gleichungen erhält man, indem man statt α_1, α_2, α_3 resp. β_1, β_2, β_3 resp. γ_1, γ_2, γ_3 setzt.

Somit erhellt die Richtigkeit der Gleichungen

(13)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a & b & c \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap+bq+cr, & p^2+q^2+r^2 \\ a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3, & \alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r \end{vmatrix}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a, & b, & c \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap+bp+cr, & p^2+q^2+r^2 \\ a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3, & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix}$$

$$-\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left[\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{o}_1, & \mathfrak{o}_2, & \mathfrak{o}_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{o}_1 p+\mathfrak{o}_2 q+\mathfrak{o}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{o}_1\gamma_1+\mathfrak{o}_2\gamma_2+\mathfrak{o}_3\gamma_3 & \gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r \end{vmatrix}\right]$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a, & b, & c \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap+bq+cr, & p^2+q^2+r^2 \\ a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3, & \gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r \end{vmatrix}$$

$$+\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left[\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{o}_1 & \mathfrak{o}_2 & \mathfrak{o}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{o}_1 p+\mathfrak{o}_2 q+\mathfrak{o}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{o}_1\beta_1+\mathfrak{o}_2\beta_2+\mathfrak{o}_3\beta_3 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix}\right]$$

Die Ausdrücke (11), (12) und (13) sind in die Gleichung (4) des d'Alembert'schen Principes einzusetzen, dazu ist — weil die Grössen

p', q', r' nicht von einander unabhängig sind — die mit dem Lagrange'schen Coefficienten λ multiplicirte Gleichung (10) zu addiren. Nachdem die Summation über die Massenpunkte des zweiten Körpers ausgeführt ist, ist dann die Gleichung (A) pag. 7. noch hinzuzufügen, nachdem in ihr $\delta\sigma$ und $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ durch die Grössen p',q',r' resp. die Grössen p, q, r und ihre Differentialquotienten ausgedrückt sind. Nun ist aber

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\,(v\text{-achse},\ O_1O_2)}{dt}$$

$$\delta\sigma = \delta(v\text{-achse},\ O_1O_2)$$

$$\cos(v\text{-achse}.\ O_1O_2) = \frac{\beta}{l};\quad \sin(v\text{-achse},\ O_1O_2) = \frac{\gamma}{l}$$

$$-\sin(v,\ O_1O_2)\,\frac{d(v,\ O_1O_2)}{dt} = \frac{1}{l}\,\frac{d\beta}{dt}$$

$$\cos(v, O_1O_2)\ \frac{d(v,\ O_1O_2)}{dt} = \frac{1}{l}\ \frac{d\gamma}{dt};$$

somit ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\beta}\,\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\delta\sigma = -\frac{1}{\gamma}\,\delta\beta = \frac{1}{\beta}\,\delta\gamma$$

Berücksichtigt man die Werte der β und γ pag. 9., so erhält man ohne Schwierigkeit

(14)

$$\frac{d\sigma}{\delta t} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3}$$

$$\delta\sigma = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}}{(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)^2} - \frac{\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3}$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 \\ p^2+q^2+r^2 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix}}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3}$$

wo für die Bildung des zweiten Differentialquotienten wieder die allgemeine Bemerkung pag. 11. und 12. benutzt worden ist.

Um auch v_1 durch die neuen Variablen auszudrücken, nehmen wir an, das vom Schwerpunkte des ersten Körpers auf die u-achse gefällte Lot habe die Länge s_1 und bilde mit der Linie O_1O_2 einen in demselben Sinne wie σ zu zählenden Winkel ι_1, so ist

(14a) $$v_1 = s_1 \cos(\iota_1 + (v, O_1O_2))$$

$$= -\frac{s_1}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left[\cos\iota_1(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)+\sin\iota_1(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\right]$$

Die Ausdrücke (14) und (14a) sind in die Gleichung (A) einfach einzusetzen.

Bei der Summation über die Massenteilchen des zweiten Körpers ist zu beachten, dass die Achsen der a, b, c Hauptträgheitsachsen sind, also

$$\Sigma m_i b_i c_i = \Sigma m_i c_i a_i = \Sigma m_i a_i b_i = 0$$

sein muss. Wir setzen ferner

$$\Sigma m_i a_i^2 = \mathfrak{A}^1), \quad \Sigma m_i b_i^2 = \mathfrak{B}, \quad \Sigma m_i c_i^2 = \mathfrak{C}$$

$$\Sigma m_i(b_i^2+c_i^2) = A, \quad \Sigma m_i(c_i^2+a_i^2) = B, \quad \Sigma m_i(a_i^2+b_i^2) = C$$

$$\Sigma m_i a_i = m_2 a_2, \quad \Sigma m_i b_i = m_2 b_2, \quad \Sigma m_i c_i = m_2 c_2,$$

wo m_2 die Masse des zweiten Körpers bedeute.

Die Ausdrücke von δu, δv, δw; $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$; $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$ zerfallen von selbst jeder in zwei Teile, deren einer den kleinen Abstand der beiden Achsen der cardanischen Aufhängung enthält, während der andere davon unabhängig ist. Diese letzteren Teile für sich

1) Der Buchstabe $\mathfrak{A}$ wird in dieser Bedeutung bald nicht mehr gebraucht werden.

componirt müssen — die der Erddrehung proportionalen Glieder, vorläufig bei Seite gelassen — genau den Ausdruck des d'Alembert'schen Principes für das gewöhnliche Drehungsproblem liefern unter dem Einflusse der parallelen Beschleunigungen

$$X = -g\sin i, \quad Z = g\cos i, \quad Y = 0.$$

Die weitläufigen Zwischenrechnungen können deshalb hier übergangen werden, sie liefern das Endergebniss:

$$Ap'\frac{dp}{dt} + Bq'\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}$$

$$-gm_2\sin i \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + gm_2\cos i \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Die von der Erddrehung abhängigen, den Abstand l nicht enthaltenden Glieder gehen aus

$$-k\Sigma m_i\left(\delta v_i\frac{dw_i}{dt} - \delta w_i\frac{dv_i}{dt}\right)$$

(B) $$-f\Sigma m_i\left(\delta w_i\frac{du_i}{dt} - \delta u_i\frac{dw_i}{dt}\right)$$

$$+e\Sigma m_i\left(\delta u_i\frac{dv_i}{dt} - \delta v_i\frac{du_i}{dt}\right)$$

hervor; hier brauchen wir nur das Glied mit $-k$ zu betrachten, da aus ihm die mit $-f$ und $+e$ proportionalen Glieder — wie man sich durch Betrachtung der Ausdrücke für die Variationen und Differentialquotienten überzeugt — durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der in den Gruppen

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

enthaltenen Glieder hervorgehen. Es ist aber

$$\Sigma m_i\left(\delta v_i\frac{dw_i}{dt} - \delta w_i\frac{dv_i}{dt}\right)$$

$$= \Sigma m_i\left[\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right]^{1)}$$

---

1) Es ist hier — wie im Vorhergehenden erwähnt wurde — zunächst l vernachlässigt worden.

Man erkennt sofort, dass die Glieder mit pp', qq', rr' sich gegenseitig aufheben, und dass der Factor von qr' im ersten Producte der Parenthese als solcher von $-rq'$ im zweiten Gliede auftritt. Man erhält also z. B. als Factor von $qr'-rq'$

$$\Sigma m_i[(c_i\gamma_1 - a_i\gamma_3)(a_i\beta_2 - b_i\beta_1) - (a_i\gamma_2 - b_i\gamma_1)(c_i\beta_1 - a_i\beta_3)]$$

Nach den Bemerkungen der vorigen Seite hebt sich bei Ausführung der Summation hier alles auf bis auf das Glied

$$-\Sigma m_i\alpha_i^2(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) = -\mathfrak{A}\alpha_1$$

Ebenso erhält man natürlich $-\mathfrak{B}\alpha_2$ als Factor von $(rp'-pr')$ und $-\mathfrak{C}\alpha_3$ als Factor von $(pq'-qp')$, und der Factor von $-k$ wird somit

$$\begin{vmatrix} p' & p, & \mathfrak{A}\alpha_1 \\ q' & q, & \mathfrak{B}\alpha_2 \\ r' & r, & \mathfrak{C}\alpha_3 \end{vmatrix}$$

Wie hieraus die Factoren von $-f$ und $+e$ hervorgehen, ist auf der vorigen Seite bemerkt worden. Die betreffenden Determinanten stimmen mit dieser in zwei entsprechenden Verticalreihen überein, lassen sich also addiren, und so ergibt sich schliesslich als Beitrag zum d'Alembert'schen Princip

$$\begin{vmatrix} p' & p & \mathfrak{A}(-\alpha_1 k - \beta_1 f + \gamma_1 e) \\ q' & q & \mathfrak{B}(-\alpha_2 k - \beta_2 f + \gamma_2 e) \\ r' & r & \mathfrak{C}(-\alpha_3 k - \beta_3 f + \gamma_3 e) \end{vmatrix}$$

Die die Erddrehung nicht enthaltenden, der ersten Potenz des kleinen Abstandes l proportionalen Glieder zerfallen in solche, die die Differentialquotienten von p, q, r enthalten, und solche, in denen dieselben nicht vorkommen.

Da die Summation hier nichts Bemerkenswertes bietet, so betrachten wir ein beliebiges von den erwähnten Gliedern, wie es aus

$$\delta w_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} + \delta v_i \frac{d^2 v_i}{dt^2}$$

hervorgeht, also das Glied

$$\frac{\sqrt{1-\mathfrak{a}_1^2}}{l}\left[\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right.$$

$$- \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix} \right| \Bigg]$$

Hier heben sich in je zwei übereinander stehenden Producten die Terme mit $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ fort, zu jedem Gliede mit $\beta_2\gamma_3$ in der ersten Reihe findet sich ein solches mit $-\beta_3\gamma_2$ in der zweiten Reihe, so dass das Ganze sich linear homogen in

$$\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \alpha_1, \quad \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 = \alpha_2, \quad \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = \alpha_3$$

ausdrücken wird. Man erhält als Factor von

$$\frac{l}{\sqrt{1-b_1^2}} (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) = \frac{l}{\sqrt{1-b_1^2}} \alpha_1$$

$$(\alpha_1 r' - \alpha_3 p') \left(b_i \frac{dp}{dt} - a_i \frac{dq}{dt} \right) - (\alpha_2 p' - \alpha_1 q') \left(a_i \frac{dr}{dt} - c_i \frac{dp}{dt} \right)$$

$$+ \left(\alpha_1 \frac{dr}{dt} - \alpha_3 \frac{dp}{dt} \right) (b_i p' - a_i q') - \left(\alpha_2 \frac{dp}{dt} - \alpha_1 \frac{dq}{dt} \right) (a_i r' - c_i p')$$

$$= \frac{dp}{dt} \left| \begin{matrix} p' & q' & r' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_i & b_i & c_i \end{matrix} \right| + p' \left| \begin{matrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_i & b_i & c_i \end{matrix} \right|$$

Die Factoren von α_2 und α_3 gehen aus diesem Ausdruck durch cyklische Vertauschung aller in ihm vorkommenden Gruppen von Grössen hervor; dabei ändern sich die Determinanten natürlich nicht, und der Beitrag dieser Glieder zum d'Alembert'schen Princip ist zusammengefasst:

$$\frac{lm_2}{\sqrt{1-b_1^2}} \Bigg[\left(\alpha_1 \frac{dp}{dt} + \alpha_2 \frac{dq}{dt} + \alpha_3 \frac{dr}{dt} \right) \left| \begin{matrix} p' & q' & r' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right|$$

$$+ (\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r) \left| \begin{matrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right| \Bigg]$$

Die $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ nicht enthaltenden, aber von der Erdrotation freien

Glieder, die die erste Potenz von l enthalten, gehen, abgesehen von dem Factor $\frac{lm_1}{\sqrt{1-b_1^2}}$ aus dem folgenden Gliede hervor:

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & p^2+q^2+r^2 \\ a_i\gamma + b_i\gamma_2 + c_i\gamma_3 & \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 p + a_2 q + a_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & p^2+q^2+r^2 \\ a_i\beta_1 + b_i\beta_2 + c_i\beta_3 & \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 p + a_2 q + a_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 & \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \end{vmatrix}$$

Hieraus ist wieder sofort zu ersehen, dass das Ganze sich linear homogen in

$$\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \alpha_1, \quad \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 = \alpha_2, \quad \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = \alpha_3$$

darstellen lassen wird; so ergibt sich im vorigen Ausdrucke als Factor von α_1

$$(a_1 r' - a_3 p') \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & c_i \\ p^2+q^2+r^2 & r \end{vmatrix}$$

$$- (a_2 p' - a_1 q') \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & b_i \\ p^2+q^2+r^2 & q \end{vmatrix}$$

$$- (a_i r' - c_i p') \begin{vmatrix} a_1 p + a_2 q + a_3 r & a_3 \\ p^2+q^2+r^2 & r \end{vmatrix}$$

$$+ (b_i p' - a_i q') \begin{vmatrix} a_1 p + a_2 q + a_3 r & a_2 \\ p^2+q^2+r^2 & q \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & a_i p' + b_i q' + c_i r' \\ p^2+q^2+r^2 & pp'+qq'+rr' \end{vmatrix}$$

$$- a_i \begin{vmatrix} a_1 p + a_2 q + a_3 r & a_1 p' + a_2 q' + a_3 r' \\ p^2+q^2+r^2 & pp'+qq'+rr' \end{vmatrix}$$

Permutirt man alle hier vorkommenden Gruppen von Grössen cyklisch, so erhält man nach einander die Factoren von α_2 und α_3; dabei bleiben die Determinanten ungeändert, nach Ausführung der Summation erhält man als Factor von $\frac{lm_2}{\sqrt{1-b_1^2}}$ bei Berücksichtigung der Relation

$$\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3=\mathfrak{d}_1$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{d}_1 & \alpha_1\mathfrak{a}_2+\alpha_2\mathfrak{b}_2+\alpha_3\mathfrak{c}_3 & 0 \\ \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_2 p+\mathfrak{b}_2 q+\mathfrak{c}_2 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1 p'+\mathfrak{a}_2 q'+\mathfrak{a}_3 r' & \mathfrak{a}_2 p'+\mathfrak{b}_2 q'+\mathfrak{c}_2 r' & pp'+qq'+rr' \end{vmatrix}$$

was zur Gleichung des d'Alembert'schen Principes hinzuzufügen ist.

Aus den von der Erdrotation abhängigen Gliedern (*B*) pag. 15. folgen auch solche, die der Grösse $\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}$ proportional sind; so ergibt sich als Factor von

$$-\frac{le}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}$$

$$\Sigma m_i\left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}\right]$$

Man erkennt sofort, dass die Klammergrösse linear homogen in

$$q'r-r'q,\quad r'p-p'r,\quad p'q-q'p$$

darstellbar ist; z. B. ergibt sich als Factor von $q'r-r'q$ in der Parenthese

$$\begin{aligned}&(c_i\alpha_1-a_i\alpha_3)(\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1)-(a_i\alpha_2-b_i\alpha_1)(\mathfrak{a}_3\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_3)\\ &=-a_i\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_1\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=-a_1(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)\\ &\qquad+\alpha_1\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

wie aus den Identitäten der orthogonalen Substitution folgt. Der Factor von $\frac{le}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}$, wie er im d'Alembert'schen Principe auftritt, ist hiernach

$$\Sigma m_i\left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix}(\alpha_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\right]$$

Der Factor von $\frac{lf}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}$ ist

$$\Sigma m_i \left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \right]$$

$$= \Sigma m_i \left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \right]$$

was auf ganz analoge Weise wie das Vorhergehende einleuchtet.

Auch der Factor von $-\frac{lk}{\sqrt{1-b_1^2}}$, nämlich

$$\Sigma m_i \left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \right]$$

ist linear homogen in

$$q'r - r'q, \quad r'p - p'r, \quad p'q - q'p$$

und man erhält z. B. den Factor von $q'r - r'q$ in der Parenthese in der Form

$$\begin{aligned} &(c_i\gamma_1 - a_i\gamma_3)(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) - (a_i\gamma_2 - b_i\gamma_1)(\alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\gamma_3) \\ &+ (c_i\beta_1 - a_i\beta_3)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - (a_i\beta_2 - b_i\beta_1)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) \\ &= -c_i\alpha_1\alpha_1\alpha_2 - c_i\alpha_2(1-\alpha_1^2) - a_i\alpha_2\alpha_1\alpha_3 \\ &+ a_i\alpha_3\alpha_1\alpha_2 + b_i\alpha_3(1-\alpha_1^2) + b_i\alpha_1\alpha_1\alpha_3 \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} + \alpha_3 b_i - \alpha_3 c_i \end{aligned}$$

Der Beitrag dieser Glieder zum d'Alembert'schen Principe ist hienach

$$-\frac{klm_2}{\sqrt{1-b_1^2}} \left[\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q'r - r'q & a_2 & \alpha_1 \\ r'p - p'r & b_2 & \alpha_2 \\ p'q - q'p & c_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \right]$$

Die dem Quadrate des Abstandes der Achsen der cardanischen Aufhängung proportionalen Glieder sind bei den Näherungen zur Lösung des vorliegenden Problemes übergangen worden; um ihre Gestalt zu zeigen, habe ich sie noch in den Ausdruck des d'Alembert'schen Principes aufgenommen, will hier aber die complicirten

Rechnungen, aus denen sie resultiren, übergehen. Das d'Alembert'sche Princip ergiebt nach allem Vorhergehenden

$$(15)\quad Ap'\frac{dp}{dt}+Bq'\frac{dq}{dt}+Cr'\frac{dr}{dt}$$

$$+\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p' & p & \mathfrak{A}(\gamma_1 e-\beta_1 f-\alpha_1 k) \\ q' & q & \mathfrak{B}(\gamma_2 e-\beta_2 f-\alpha_2 k) \\ r' & r & \mathfrak{C}(\gamma_3 e-\beta_3 f-\alpha_3 k) \end{vmatrix}$$

$$+\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left\{\left(\alpha_1\frac{dp}{dt}+\alpha_2\frac{dq}{dt}+\alpha_3\frac{dr}{dt}\right)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right.$$

$$+(\alpha_1 p'+\alpha_2 q'+\alpha_3 r')\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\left.+\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3 & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2 & 0 \\ \alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r & a_2 p+b_2 q+c_2 r & p^2+q^2+r^2 \\ \alpha_1 p'+\alpha_2 q'+\alpha_3 r' & a_2 p'+b_2 q'+c_2 r' & pp'+qq'+rr' \end{vmatrix}\right\}$$

$$+\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left\{e\left[(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \mathfrak{a}_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right.\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\right]$$

$$+f\left[(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \mathfrak{a}_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\right]$$

$$\left.+k\left[\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} q'r-r'q & \alpha_1 & \alpha_2 \\ r'p-p'r & \mathfrak{a}_2 & b_2 \\ p'q-q'p & \mathfrak{a}_2 & c_2 \end{vmatrix}\right]\right\}$$

$$-\frac{m_2 l^2}{1-\mathfrak{d}_1^2}\left\{(\alpha_1 p'+\alpha_2 q'+\alpha_3 r')\left(\mathfrak{a}_1\frac{dp}{dt}+\mathfrak{a}_2\frac{dq}{dt}+\mathfrak{a}_3\frac{dr}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+(\alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}-\mathfrak{d}_1 k\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+T_1\left\{\frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{(\alpha_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)^2(\mathfrak{a}_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)}\right.$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)}$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 \\ p^2+p^2+r^2 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)} \Bigg\{$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$-gm_2 \sin i \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + g\cos i \left\{ \frac{m_2 l}{\sqrt{1-b_1^2}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \right\}$$

$$-gm_1 \cos i \frac{s_1}{\sqrt{1-b_1^2}} \left(\cos l_1 \frac{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3} + \sin l_1 \right) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

4.

Man kann aus der vorstehenden Gleichung sofort ein Integral nämlich dasjenige der lebendigen Kraft ableiten, indem man für die Grössen p', q', r' die Elementarrotationen $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ setzt, die wenn sie an die Bedingung

$$\begin{vmatrix} p\,dt & \alpha_1 & \alpha_1 \\ q\,dt & \alpha_2 & \alpha_2 \\ r\,dt & \alpha_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

geknüpft sind, eine virtuelle Verrückung darstellen. Dann verschwinden eine Reihe Glieder, weil in den betreffenden Determinanten zwei Reihen nur durch einen constanten Factor dt verschieden sind, oder weil die Grössen

$$q'r-r'q, \quad r'p-p'r, \quad p'q-q'p$$

gleich Null werden. Man erhält nach Ausführung der Integration

$$(16)\quad \tfrac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+\frac{lm_2}{\sqrt{1-b_1^2}}(\alpha_1 p+\alpha_2 q\alpha_3 r)\begin{vmatrix} p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{m_2 l^2}{1-b_1^2}(\alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r)^2+\tfrac{1}{2}T_1\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}^2}{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta+\alpha_3\beta_3)^2}$$

$$= h'-gm_2\sin i(\alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2)$$

$$+gm_2'\cos i\left\{\frac{l}{\sqrt{1-b_1^2}}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+\gamma_1 a_2+\gamma_2 b_2+\gamma_3 c_3\right\}$$

$$+\frac{gm_1 s_1}{\sqrt{1-b_1^2}}\left\{\cos\iota_1(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)-\sin\iota_1(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\right\}$$

wo h' die Integrationsconstante bedeuten möge. Hier ist das Integral der lebendigen Kraft für den ersten Körper (*B*) pag. 7. benutzt worden, $\frac{d\sigma}{dt}$ ist aus (14) pag. 13. entnommen, und w_1 auf analoge Weise wie v_1 ((14a) pag. 14.) berechnet worden, nämlich folgendermassen

$$w_1 = s_1\sin(\iota+(v,\ O_1 O_2))$$

$$=\frac{s_1}{\sqrt{1-b_1^2}}\left\{\cos\iota_1(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)-\sin\iota_1(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\right\}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung können aus der Gleichung (15) dadurch erhalten werden, dass man die Factoren von p', q', r' auf beiden Seiten der Gleichung resp. einander gleichsetzt. Wir werden später die dritte Bewegungsgleichung, also die durch Gleichsetzung der Factoren von r' entstehende hinschreiben, weil wir sie allein explicite brauchen werden.

Bei der Behandlung des Drehungsproblemes werden die Differentialgleichungen im allgemeinen mit $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ multiplicirt und addirt [1]). In dem Falle, wo auf den bewegten Körper dann nur constante parallele Beschleunigungen wirken, ist die entstehende Summe ein vollständiges Differential; allein schon in dem Falle, dass der um einen festen Punkt drehbare Körper ausserdem dem Einflusse der Erdrotation unterworfen ist, gelingt es im allgemeinen weder auf diesem noch auf einem anderen Wege ein vollständiges Integral der Bewegungsgleichungen zu erhalten. In unserem Falle, wo das System aus zwei starren Systemen zusammengesetzt ist, können wir um so weniger erwarten, ein vollständiges Integral zu erhalten.

1) u. a. Hansen a. a. O. pag. 22 ff.

Statt nun, wie gewöhnlich, die Differentialgleichungen resp. mit $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ zu multipliciren und dann zu addiren, können wir auch in der Gleichung (15) des d'Alembert'schen Principes $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ resp. für p', q', r' setzen, müssen dann aber, da $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ im allgemeinen keine virtuelle Verrückung darstellen, den mit dem Lagrange'schen Coefficienten λ multiplicirten Ausdruck beibehalten. Man erkennt sofort, dass bei dem erwähnten Verfahren eine Reihe von Determinanten fortfällt, weil in ihnen zwei Horizontalreihen dann nur durch den constanten Factor dt verschieden sind.

Bei Ausführung der Integration ist Folgendes zu beachten:

1) Die auch im gewöhnlichen Drehungsproblem auftretenden Glieder geben integrirt

$$A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r.$$

2) Die von der Erdrotation abhängigen, in der Determinante

$$\begin{vmatrix} p' & p & \mathfrak{A}(\gamma_1 e - \beta_1 f - \alpha_1 k) \\ q' & q & \mathfrak{B}(\gamma_2 e - \beta_2 f - \alpha_2 k) \\ r' & r & \mathfrak{C}(\gamma_3 e - \beta_2 f - \alpha_3 k) \end{vmatrix}$$

vereinigten Glieder werden nach den Gliedern der dritten Verticalreihe geordnet, dann sind die Coefficienten derselben die Unterdeterminanten

$$\gamma_2 r\,dt - \gamma_3 q\,dt = d\gamma_1, \quad \gamma_3 p\,dt - \gamma_1 r\,dt = d\gamma_2$$
$$\gamma_1 q\,dt - \gamma_2 p\,dt = d\gamma_3$$

3) Von den mit $\frac{lm_2}{\sqrt{1-b_1^2}}$ proportionalen Gliedern fällt dasjenige mit dem Factor

$$\alpha_1 p' + \alpha_2 q' + \alpha_3 r'$$

fort, weil bekanntlich

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0$$

ist. Die folgende Determinante wird nach Gliedern der ersten Horizontalreihe geordnet, und ergibt

$$dt\,b_1\{a_2[q(p\gamma_2 - q\gamma_1) + r(p\gamma_3 - r\gamma_1)] + b_2[p(q\gamma_1 - p\gamma_2) + r(q\gamma_3 - r\gamma_2)] + c_2[p(r\gamma_1 - p\gamma_3) + q(r\gamma_2 - q\gamma_3)]\}$$
$$+ dt(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2)\{a_1[q(q\gamma_1 - p\gamma_2) + r(r\gamma_1 - p\gamma_3)] + a_2[p(p\gamma_2 - q\gamma_1) + r(r\gamma_2 - q\gamma_3)] + a_3[p(p\gamma_3 - r\gamma_1) + q(q\gamma_3 - r\gamma_2)]\}$$
$$= b_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_2 \\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p & q & r \\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3 \end{vmatrix}$$

4) Die von der Natur des ersten Körpers abhängigen Glieder fallen aus dem bereits erwähnten Grunde sämtlich fort. Der Einfluss dieses ersten Körpers bleibt nur implicite in der Grösse λ enthalten.

5) Der Coefficient dieser Grösse gibt nach den Gliedern der zweiten Horizontalreihe entwickelt

$$-dt(\mathfrak{a}_1(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)+\mathfrak{a}_2(\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3)+\mathfrak{a}_3(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1))$$
$$=-dt(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)$$

6) Die folgenden Glieder werden, sofern sie nicht ganz fortfallen, analog dem vorhergehenden nach den Gliedern ihrer ersten Horizontalreihen entwickelt und mit Hülfe der Identitäten der orthogonalen Substitution reducirt. Speciell ist noch

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = (\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3)dt - \mathfrak{b}_1 dt$$

Nach Ausführung der Integrationen ergibt sich:

$$(17)\quad A\gamma_1 p+B\gamma_2 q+C\gamma_3 r+\frac{e}{2}(\mathfrak{A}\gamma_1^2+\mathfrak{B}\gamma_2^2+\mathfrak{C}\gamma_3^2)$$
$$-\mathfrak{A}\int d\gamma_1(f\beta_1+k\alpha_1)-\mathfrak{B}\int d\gamma_2(f\beta_2+k\alpha_2)-\mathfrak{C}\int d\gamma_3(f\beta_3+k\alpha_3)$$
$$+\frac{m_2 l}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\int\Bigg\{(\alpha_1 dp+\alpha_2 dq+\alpha_3 dr)\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$
$$+\mathfrak{b}_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3\\ p & q & r\end{vmatrix}+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2)\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\\ p & q & r\\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3\end{vmatrix}\Bigg\}$$
$$+\frac{m_2 le}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\int\Bigg\{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)(a_2 d\gamma_1+b_2 d\gamma_2+c_2 d\gamma_3)$$
$$+(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3)\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\end{vmatrix}\Bigg\}$$
$$+\frac{m_2 lf}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\int\Bigg\{(\mathfrak{c}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)(a_2 d\gamma_1+b_2 d\gamma_2+c_2 d\gamma_3)$$
$$-(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3)\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$+\frac{m_2 lk}{\sqrt{1-b_1^2}}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} - \int (\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 + \alpha_3 d\gamma_3) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-\frac{m_2 l^2}{1-b_1^2}\left\{(a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3)(a_1 p+a_2 q+a_3 r)-b_1 k(a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3)\right\}$$

$$= \Gamma - \int \lambda(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)dt + gm_2 \sin i \int (\beta_1 a_2+\beta_2 b_2+\beta_3 c_2)dt$$

$$+gm_2 l\cos i\,\frac{b_1 t}{\sqrt{1-b_1^2}}.$$

Es wurde schon pag. 23. erwähnt, dass die dritte Bewegungsgleichung Anwendung finden würde: dieselbe soll nämlich benutzt werden, um die Grösse λ auszudrücken, deren Wert in die vorig Gleichung zu substituiren ist. Die dritte Bewegungsgleichung lautet

$$(18)\quad C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq+\mathfrak{P}p(\gamma_2 e-\beta_2 f-\alpha_2 k)-\mathfrak{Q}q(\gamma_1 e-\beta_1 f-\alpha_1 k)$$

$$+\frac{m_2 l}{\sqrt{1-b_1^2}}\left\{(a_1 b_2-a_2 a_2)\left(\alpha_1\frac{dp}{dt}+\alpha_2\frac{dq}{dt}+\alpha_3\frac{dr}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+\alpha_3\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 p+a_2 q+a_3 r & a_3 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2 & a_2 p+b_2 q+c_2 r & c_2 \\ 0 & p^2+q^2+r^2 & r \end{vmatrix}\right\}$$

$$+\frac{lm_2}{\sqrt{1-b_1^2}}\left\{\frac{d\alpha_3}{dt}\begin{vmatrix} a_2 & k\alpha_1+f\beta_1-e\gamma_1 & a_1 \\ b_2 & k\alpha_2+f\beta_2-e\gamma_2 & a_2 \\ c_2 & k\alpha_3+f\beta_3-f\gamma_3 & a_3 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(b_2 p-a_2 q)(a_1(e\beta_1+f\gamma_1)+a_2(e\beta_2+f\gamma_2)+a_3(e\beta_3+f\gamma_3))+k\begin{vmatrix} a_2 & -q & a_1 \\ b_2 & p & a_2 \\ c_2 & 0 & a_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-\frac{l^2 m_2}{1-b_1^2}\left\{a_3\left(a_1\frac{dp}{dt}+a_2\frac{dq}{dt}+a_3\frac{dr}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+(a_1 p+a_2 q+a_3 r)(a_2 p-a_1 q)-b_1 k(a_2 p-a_1 q)\right\}$$

$$+\frac{T_1(a_1\gamma_2-a_2\gamma_1)}{(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)(a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3)}\times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} 1 & c_1+\gamma_1c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 & c_1p+c_2q+c_3r \\ c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3 & 0 & \beta_1p+\beta_2q+\beta_3r \\ c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 & \gamma_1p+\gamma_2q+\gamma_3r & p^2+q^2+r^2 \end{vmatrix} : c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1p+c_2q+c_3r & p^2+q^2+r^2 \\ c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3 & \beta_1p+\beta_2q+\beta_3r \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \lambda(c_1\alpha_2-c_2\alpha_1)-gm_2\sin i(\alpha_2a_2-\alpha_1b_2)$$

$$+gm_2\cos i\left\{\frac{l}{\sqrt{1-b_1^2}}(a_1\beta_2-a_2\beta_1)+a_2\gamma_2-b_2\gamma_1\right\}$$

$$-\frac{gm_1s_1\cos i}{\sqrt{1-b_1^2}}\left\{\cos\iota_1\frac{a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3}{a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3}+\sin\iota_1\right\}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist benutzt worden, dass in einer Reihe von dem kleinen Abstande l und der Erdrotation abhängiger Glieder die Determinante

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

als Factor auftritt, worin

$$p\alpha_2-q\alpha_1=-\frac{d\alpha_3}{dt}$$

Coefficient von r' ist. Die Glieder, die diesen Coefficienten haben, lassen sich — was angewendet werde — zu einer einzigen Determinante zusammenfassen.

Ferner ist in einem der vom ersten Körper abhängigen Glieder das Multiplicationstheorem der Determinanten benutzt worden.

5.

Bei der Behandlung des Problemes der Drehung eines schweren Körpers um einen festen Punkt hat sich Lagrange genötigt gesehen beschränkende Voraussetzungen über die Natur des bewegten Körpers zu machen, indem er annahm, dass zwei Hauptträgheitsmomente desselben einander gleich seien, in der Achse des dritten aber der Schwerpunkt des Systemes liege. Dieselben Voraussetzungen macht Hansen [1]) bei der Behandlung des ausser durch die Schwerkraft

1) a. a. O. pag. 23. f.

noch durch die Erdrotation beeinflussten Körpers. Danach hätten wir zu setzen

$$A - B, \quad a_2 = b_2 = 0$$

Bei der Unvollkommenheit mechanischer Instrumente lässt sich indessen immer nur erwarten, dass diese Voraussetzungen näherungsweise erfüllt seien, und wir werden deshalb hinfort annehmen, dass $A - B$, a_2, b_2 kleine Grössen seien, deren Producte mit anderen ebenso beschaffenen Grössen oder mit sich selbst wir stets vernachlässigen werden.

Sind ferner die an das Gaussische Pendel in Beziehung auf Präcision zu stellenden Anforderungen näherungsweise erfüllt, so ist der Abstand l der beiden sich kreuzenden Geraden gering, ebenso der Cosinus $\mathfrak{d}_1$ des durch die beiden Achsen der cardanischen Aufhängung gebildeten Winkels; wir werden nun künftighin die Grössen $\mathfrak{d}_1^2$ und l^2, sowie $\mathfrak{d}_1 l$ vernachlässigen, und wollen ein mit $\mathfrak{d}_1 l$ proportionales Glied in (17), weil es zugleich die Zeit als Factor enthält, nur beibehalten, um zu zeigen, dass es sich gegen ein anderes durch Elimination von λ erscheinendes Glied fortheben wird; auch die Grössen la_2 und lb_2 werden von jetzt ab unterdrückt werden.

Wir führen ferner die Bezeichnungen ein:

$$A + B = 2E, \quad A - B = 2D, \quad \frac{A - B}{A + B} = \Delta,$$

und werden künftig auch die Grössen Δl und $\Delta \mathfrak{d}_1$ vernachlässigen. Nach der Bedeutung der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (vgl. pag. 14.) ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{B + C - A}{2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{C + A - B}{2}, \quad \mathfrak{C} = \frac{A + B - C}{2}$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{E} = \frac{C}{2E} - \Delta, \quad \frac{\mathfrak{B}}{E} = \frac{C}{2E} + \Delta, \quad \frac{\mathfrak{C}}{E} = 1 - \frac{C}{2E}$$

Auch die Grösse $\frac{T_1}{E}$ wird unbedeutend sein, denn einmal wird der erste — um die feste Achse schwingende — Körper bei zweckmässiger Construction des Apparates an Masse gegenüber dem um die bewegliche Achse schwingenden Körper bedeutend zurücktreten, und ferner werden auch die Massenteilchen desselben eine viel geringere Entfernung von der Umdrehungsachse haben, als die des zweiten Körpers — speciell die der massiven Linse. Der Umstand, dass der Hauptteil des Gaussischen Pendels eine an einer verhältnissmässig leichten Stange befindliche schwere Linse ist, bewirkt ferner, dass die den Schwerpunkt enthaltende oder doch in seiner Nähe vorbei-

gehende Hauptträgheitsachse diejenige des kleinsten Trägheitsmomentes ist, mit andern Worten, dass die Grösse $\frac{C}{E}$ von geringem Betrage sein wird. Wir werden dieselbe indessen nicht den anderen eben betrachteten Grössen an Ordnung gleichstellen, da sie wegen der bedeutenden Masse des Linsenkörpers jedenfalls grösser als $\frac{J_1}{E}$ sein wird. Spätere Betrachtungen sollen uns ein Urteil über den Betrag von $\frac{C}{E}$ verschaffen.

Nennt man ν den Winkel, welchen die bewegliche Achse mit ihrer Projection auf die Ebene der Achsen der beiden nahe gleichen Hauptträgheitsmomente bildet und rechnet ν positiv, wenn die (pag. 8.) als positiv definirte Seite der beweglichen Rotationsachse in der Ruhelage des Apparates oberhalb der a-b-ebene liegt, negativ, wenn sie unterhalb derselben hingeht, — und nennt man ferner μ den von der $+a$-achse nach der $+b$-achse und in dieser Richtung ev. weiter zu zählenden Winkel, den eben jene Projection mit der $+a$-achse bildet, so ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\mu\cos\nu \\ \alpha_2 &= \sin\mu\cos\nu \\ \alpha_3 &= \sin\nu \end{aligned}$$

Nun wird bei zweckmässiger Construction des Pendels α_3 sehr klein ein, und wir werden

$$\sin\nu = \nu, \quad \cos\nu = 1$$

setzen dürfen, so dass

$$\alpha_1 = \cos\mu, \quad \alpha_2 = \sin\mu, \quad \alpha_3 = \nu$$

wird, und Producte, wie $\alpha_3 \frac{J_1}{E}$ stets zu übergehen sein werden.

Ferner wird auch die Neigung i der festen Achse gegen die Horizontalebene als gering angesehen, also

$$\sin i = i, \quad \cos i = 1, \quad a_2 i = b_2 i = 0$$

gesetzt werden können. Eine sehr kleine Grösse ist ferner $\frac{m_1 s_1}{E}$, einmal weil die Masse des ersten Körpers gering is , und dann weil der Abstand s_1 des Schwerpunktes des ersten Körpers von der festen Achse sehr gering sein wird, vom Mechaniker sogar fast gleich Null wird gemacht werden können, wir können aber jedenfalls die Grösse $\alpha_3 \frac{m_1 s_1}{E}$ vernachlässigen.

Diese Erwägungen auf die Gleichungen (16) und (17) anwendend, erhält man nach Division derselben durch E, da

$$\frac{A}{E} = \frac{E+D}{E} = 1+\Delta, \quad \frac{B}{E} = \frac{E-D}{E} = 1-\Delta \text{ ist:}$$

$$(19)\quad \tfrac{1}{2}\left(p^2+q^2+\frac{C}{E}r^2+\Delta(p^2-q^2)\right)+\frac{lm_2c_2}{E}(\alpha_1p+\alpha_2q+\alpha_3r)(\alpha_2p-\alpha_1q)$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{T_1}{E}\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ p & q & r\end{vmatrix}^2}{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2}-\frac{h'}{2E}$$

$$-\frac{gm_2c_2}{E}i\alpha_3+\frac{gm_2}{E}\{l(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)+a_2\gamma_1+b_2\gamma_2+c_2\gamma_3\}$$

$$+\frac{gm_1s_1}{E}\begin{vmatrix}\cos\iota_1 & \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2\\ \sin\iota_1 & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\end{vmatrix}$$

$$(20)\quad \gamma_1p+\gamma_2q+\frac{C}{E}\gamma_3r+\Delta(\gamma_1p-\gamma_2q)+\frac{e}{2}\gamma_3^2+\frac{eC}{4E}(\gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2)$$

$$+\frac{\Delta e}{2}(\gamma_2^2-\gamma_1^2)-\int(f\beta_3+k\alpha_3)d\gamma_3$$

$$-\frac{C}{2E}\int f(\beta_1d\gamma_1+\beta_2d\gamma_2-\beta_3d\gamma_3)+k(\alpha_1d\gamma_1+\alpha_2d\gamma_2-\alpha_3d\gamma_3)$$

$$+\Delta\int[f(\beta_1d\gamma_1-\beta_2d\gamma_2)+k(\alpha_2d\gamma_1-\alpha_2d\gamma_2)]$$

$$+\frac{m_2lc_2}{E}\int\left((\alpha_1dp+\alpha_2dq+\alpha_3dr)(\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2)+\alpha_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ p & q & r\\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3\end{vmatrix}\right)$$

$$+\frac{m_2c_2le}{E}\int((\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)d\gamma_3+(\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2)(\alpha_1d\gamma_1+\alpha_2d\gamma_2+\alpha_3d\gamma_3))$$

$$+\frac{m_2c_2lf}{E}\int((\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)d\gamma_3-(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)(\alpha_1d\gamma_1+\alpha_2d\gamma_2+\alpha_3d\gamma_3))$$

$$+\frac{m_2c_2lk}{E}\int((\alpha_2d\gamma_1-\alpha_1d\gamma_2)-(\alpha_2\alpha_1-\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1d\gamma_1+\alpha_2d\gamma_2+\alpha_3d\gamma_3))$$

$$-\frac{\Gamma}{E}-\int^{\lambda}\frac{}{E}dt(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+\frac{gm_2c_2}{E}i\int\beta_3dt+\frac{gm_2l}{E}\mathfrak{d}_1t$$

Behandelt man schliesslich auch die Gleichung (18) auf die angegebene Weise und berechnet aus ihr gleich den Wert von $\frac{\lambda}{E}$, so erhält man

(21)

$$\frac{\lambda}{E} = \frac{1}{a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1}\left\{\frac{C}{E}\frac{dr}{dt} + \frac{C}{2E}\left[e(\gamma_2 p - \gamma_1 q) - f(\beta_2 p - \beta_1 q) - k(\alpha_2 p - \alpha_1 q)\right]\right.$$

$$+ \Delta\left[-2pq + e(\gamma_2 p + \gamma_1 q) - f(\beta_2 p + \beta_1 q) - k(\alpha_2 p + \alpha_1 q)\right]$$

$$+ \frac{lm_2c_2}{E}\left[a_2\alpha_3\left(\frac{dp}{dt} - qr\right) - a_1\alpha_3\left(\frac{dq}{dt} + pr\right)\right.$$

$$\left. + \frac{da_3}{dt}\begin{vmatrix} k\alpha_1 + f\beta_1 - e\gamma_1 & a_1 \\ k\alpha_2 + f\beta_2 - e\gamma_2 & a_2 \end{vmatrix} - k(a_1 p + a_2 q)\right]$$

$$+ \frac{T_1}{E}\frac{a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1}{(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)(a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2)}\left\{(\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r)\left[-\frac{\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r}{a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(a_1 p + a_2 q)(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)}{a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2}\right] - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \end{vmatrix}\right\}$$

$$- \frac{gm_2}{E}\left[l(a_1\beta_2 - a_2\beta_1) + a_2\gamma_2 - b_2\gamma_1\right]$$

$$+ \frac{gm_1s_1}{a_1\beta_1 + a_2\beta_2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\iota_1 & -a_1\beta_1 - a_2\beta_2 \\ \sin\iota_1 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 \end{vmatrix}\Bigg\}$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{\lambda}{E}$ in Gleichung (20) ein, so ergeben jetzt die beiden Gleichungen (19) und (20) bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen des Systemes

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = b_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

durch nochmalige Integration die Bewegung des Gaussischen Pendels.

6.

Der Weg der Integration ist aber derjenige der successiven Approximation, d. h. man nimmt zunächst an, dass die Entfernung des Körpers aus der Gleichgewichtslage so gering sei, dass man ihre höheren Potenzen gegen die niedrigeren vernachlässigen könne, nimmt dann in den betrachteten Gleichungen immer die nächst höheren Potenzen des Ausschlags hinzu, bis die Näherung genügend scheint.

Man hat für die weitere Behandlung des Drehungsproblems drei Winkel ϑ, ψ, χ eingeführt, die mit den Coefficienten α_1, β_1, γ_1 etc. der orthogonalen Substitution durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\sin\chi\sin\psi + \cos\chi\cos\psi\cos\vartheta \\
\beta_1 &= \sin\chi\cos\psi + \cos\chi\sin\psi\cos\vartheta \\
\gamma_1 &= -\cos\chi\sin\vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= -\cos\chi\sin\psi - \sin\chi\cos\psi\cos\vartheta \\
\beta_2 &= \cos\chi\cos\psi - \sin\chi\sin\psi\cos\vartheta \\
\gamma_2 &= \sin\chi\sin\vartheta
\end{aligned}$$

[1])

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \cos\psi\sin\vartheta \\
\beta_3 &= \sin\psi\sin\vartheta \\
\gamma_3 &= \cos\vartheta
\end{aligned}$$

zusammenhangen. Es bedeutet dabei ϑ den Winkel, welchen die $+c$-achse mit der $+a$-achse bildet. Da bei genauer Erfüllung aller Anforderungen an Präcision der Winkel ϑ in der Ruhelage genau gleich Null ist, so eignet sich eine Entwickelung nach Potenzen von ϑ am besten für den Zweck der successiven Näherung. Der Winkel ψ wird von der durch die c-achse und die a-achse gelegten Ebene mit der durch die feste Drehachse und die Schwerkraft bestimmten Ebene gebildet. Endlich bedeutet χ den Winkel, den die c-a-ebene mit der ac-ebene bildet, und die beiden letzten Winkel sind auf der südlichen Hemisphäre im Sinne der Erdrotation, auf der nördlichen im entgegengesetzten Sinne zu zählen.

Die Bedingungsgleichung des Systems

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = \delta_1$$

constituirt zugleich einen Zusammenhang zwischen den Winkeln, vermöge dessen sich einer von ihnen, z. B. χ, aus den beiden andern, also ϑ und ψ, berechnen lässt.

Wir werden bei allen folgenden Entwickelungen nur bis zu vierten Potenzen von ϑ aufsteigen, weil sich bei Berücksichtigung dieser schon complicirte Formeln ergeben, die charakteristischen Züge der Bewegung aber durch die höheren Glieder kaum wesentlich alterirt werden. Weil wir nun später die mit δ_1, ν, l etc. multiplicirten Glieder erst in zweiter Näherung behandeln und bei dieser — also bei Berücksichtigung von sogenannten Störungen erster Ordnung stehen bleiben wollen, so wird es genügen in allen mit jenen kleinen Grössen multiplicirten Gliedern die beiden niedrigsten Potenzen von ϑ zu berücksichtigen, die in ihnen vorkommen. Schliesslich werden — wie erwähnt — die Producte jener kleinen Grössen künftig unterdrückt werden.

1) u. a. Hansen, a. a. O. pag. 20.

Mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen findet man jene Relation zwischen den ϑ, ψ, χ durch Substitution der auf der vorigen Seite gegebenen Werte von α_1, β_1, γ_1 in die Bedingungsgleichung wie folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_1 &= \cos\mu\left(-\sin\chi\sin\psi+\cos\chi\cos\psi\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^4}{24}\right)\right)\\
&+\sin\mu\left(-\cos\chi\sin\psi-\sin\chi\cos\psi\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^4}{24}\right)\right)\\
&+\nu\cos\psi\,\vartheta\\
&=\cos(\psi+\chi+\mu)-\cos\psi\cos(\chi+\mu)\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)+\nu\vartheta\cos\psi
\end{aligned}$$

Der Winkel $\psi+\chi+\mu$ ist in der Ruhelage der Winkel, um den die bewegliche Achse von der festen Achse absteht, und dieser war bis auf kleine Fehler gleich $\frac{\pi}{2}$ definirt, also wird

$$\cos(\chi+\psi+\mu)=\mathfrak{d}_1-\nu\vartheta\cos\psi+\cos\psi\cos(\chi+\mu)\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\begin{aligned}
\sin(\chi+\psi+\mu) &= 1-\mathfrak{d}_1\frac{\vartheta^2}{2}\cos\psi\cos(\chi+\mu)+\nu\frac{\vartheta^3}{2}\cos^2\psi\cos(\chi+\mu)\\
&\quad-\frac{\vartheta^4}{8}\cos^2\psi\cos^2(\chi+\mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\chi+\mu) &= \cos(\chi+\psi+\psi\mu)\cos\psi+\sin(\chi+\psi+\mu)\sin\psi\\
&= \sin\psi+\mathfrak{d}_1\cos\psi-\nu\vartheta\cos^2\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos^2\psi\sin\psi,
\end{aligned}$$

wenn man die Entwickelung nur soweit treibt, als es zur Substitution des Wertes von $(\chi+\mu)$ in denjenigen von $\cos(\chi+\psi+\mu)$ nötig ist. Somit wird

$$\begin{aligned}
\cos(\chi+\psi+\mu) &= \mathfrak{d}_1-\nu\vartheta\cos\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi\\
&\quad+\frac{\vartheta^4}{4}(\cos^3\psi\sin\psi-\tfrac{1}{6}\sin\psi\cos\psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(I)}\quad \chi &= \frac{\pi}{2}-\psi-\mu-\mathfrak{d}_1+\nu\vartheta\cos\psi-\frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi\\
&\quad-\frac{\vartheta^4}{4}(\cos^3\psi\sin\psi-\tfrac{1}{6}\sin\psi\cos\psi)
\end{aligned}$$

mit hinreichender Genauigkeit.

Auch die Grössen p, q, r sind durch die Grössen ϑ, ψ, χ und ihre Differentialquotienten auszudrücken, und zwar ist [1])

$$r = \frac{d\chi}{dt} + \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(\chi+\psi)}{dt} - \left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24}\right)\frac{d\psi}{dt}$$

$$q = \sin\chi\sin\vartheta\,\frac{d\psi}{dt} + \cos\chi\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$p = -\cos\chi\sin\vartheta\,\frac{d\psi}{dt} + \sin\chi\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

Aber aus Gleichung (I) folgt

$$\frac{d(\chi+\psi)}{dt} = \nu\,\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt} - \vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\frac{d\psi}{dt}$$
$$- \vartheta^3\,\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi(\cos^2\psi - \tfrac{1}{6}) - \frac{\vartheta^4}{4}(\cos\psi\cos 3\psi - \tfrac{1}{6}\cos 2\psi)\frac{d\psi}{dt}$$

(II) $$r = \nu\,\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt} - \vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\cos^2\psi\,\frac{d\psi}{dt}$$
$$- \vartheta^3\,\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi(\cos^2\psi - \tfrac{1}{6}) - \frac{\vartheta^4}{24}\cos\psi(6\cos 3\psi - 2\cos\psi)\,\frac{d\psi}{dt}$$

also — ϑ und ν als Grössen erster Ordnung aufgefasst — bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$r = \nu\,\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt} - \vartheta\cos\psi\,\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}.$$

Es leuchtet hienach ein, dass, während p und q Grössen erster Ordnung sind in Beziehung auf die Grössen ϑ, $\frac{d\vartheta}{dt}$, ν, ν_1, r von der zweiten Ordnung in Bezug auf dieselben ist.

Eine Grösse von besonderer Kleinheit ist die Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Dieselbe beträgt in Winkelmaass 15″,041, also in Bogenmaass $\frac{1}{13714}$ [2]). Wir werden daher, ohne die Grenzen der zu Grunde gelegten Genauigkeit zu verengern, sicherlich in den mit n multiplicirten, also den Grössen e, f, k proportionalen Gliedern nur bis zu dritten Potenzen von ϑ aufzusteigen nötig haben, dort aber, wo e, f, k mit anderen kleinen Werten, wie A oder l multiplicirt auftreten, nur bis zu Quadraten von ϑ.

1) u. a. Hansen, pag. 20.

2) Hansen a. a. O. pag. 34 f., welcher pag. 31. n als eine Grösse zweiter oder höherer Ordnung bezeichnet.

Unter dieser Voraussetzung erkennt man leicht, dass in der Formel für $\frac{\lambda}{E}$ die ersten mit dem Factor $\frac{C}{E}$ multiplicirten Glieder von der zweiten Ordnung in ϑ, ν etc. sind, ebenso wie das Glied mit dem Factor $m_1 s_1$, wenn man diesen als von der ersten Ordnung rechnet, alle übrigen Glieder aber von höherer Ordnung sind.

In der Gleichung (20) kommt nun vor

$$-\int^{\lambda}_{E} dt(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3),$$

im Ausdrucke für $\frac{\lambda}{E}$ ist also die Grösse in der Parenthese mit

$$-\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_1}$$

zu multipliciren und das Product nach der Zeit zu integriren. Bei der Entwickelung des eben hingeschriebenen Factors ist demnach nur ein Aufsteigen bis zu Grössen zweiter Ordnung in ϑ und ν nötig, und da sich herausstellt, dass derselbe von 1 nur um Grössen zweiter Ordnung verschieden ist, so kann man das betreffende Glied der rechten Seite von Gleichung (20) einfach hinschreiben, indem man den Ausdruck in der Parenthese in Gleichung (21) integrirt und nur die aus der ersten Zeile desselben entspringenden Glieder vierter Ordnung hinzufügt. Um die Richtigkeit der über den Ausdruck

$$-\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_1}$$

aufgestellten Behauptung zu beweisen, entwickeln wir zunächst die α_1, β_1, γ_1, etc. nach Potenzen von ϑ und erhalten

$$\alpha_1 = \cos(\chi+\psi) - \cos\chi\cos\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\alpha_2 = -\sin(\chi+\psi) + \sin\chi\cos\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\alpha_3 = \cos\psi\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\beta_1 = \sin(\chi+\psi) - \cos\chi\sin\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\beta_2 = \cos(\chi+\psi) + \sin\chi\sin\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\beta_3 = \sin\psi\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\gamma_1 = -\cos\chi\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\gamma_2 = \sin\chi\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\gamma_3 = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{24}$$

Hiermit wird

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \sin(\chi+\psi+\mu) + \nu\vartheta\sin\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos(\chi+\mu)$$

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 = -\sin(\chi+\psi+\mu) + \cos\psi\sin(\mu+\chi)\frac{\vartheta^2}{2}$$

und da wir die Entwickelung nur bis zu Quadraten von ϑ zu treiben brauchen, so entnehmen wir einfach von pag. 33.

$$\begin{aligned}\sin(\chi+\psi+\mu) &= 1\\ \cos(\chi+\mu) &= \sin\psi\\ \sin(\chi+\mu) &= \cos\psi\end{aligned}$$

Demnach erhalten wir

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 1 + \nu\vartheta\sin\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi$$

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 = -\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\cos^2\psi\right)$$

$$-\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1} = 1 + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Wenn wir jetzt die Gleichung (20) mit Rücksicht auf den Wert von

$$-\int\frac{\lambda}{E}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)\,dt$$

hinschreiben, so dürfen wir von vornherein mehrere Glieder, die sich als solche von der fünften Ordnung erweisen, bei Seite lassen; wir wenden ferner auf die Reduction der Gleichung (20) nur noch die Identitäten

$$(\gamma_2 p - \gamma_1 q)\,dt = -d\gamma_3,$$
$$(\beta_2 p - \beta_3 q)dt = -d\beta_3\,(\alpha_2 p - \alpha_1 q) = -d\alpha_3$$

an, und erhalten bei passender Anordnung der Glieder die Gleichung

$$(22)\quad \gamma_1 p+\gamma_2 q+\frac{C}{E}\{(\gamma_3-1)r-\int dr(\nu\vartheta\sin\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)\}$$

$$+\frac{e}{2}\gamma_3{}^2-\int(f\beta_3+k\alpha_3)d\gamma_3+\frac{C}{4E}e(\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2-\gamma_3{}^2+2\gamma_3)$$

$$-\frac{C}{2E}\int\{(f\beta_1+k\alpha_1)d\gamma_1+(f\beta_2+k\alpha_2)d\gamma_2-(f\beta_3+k\alpha_3)d\gamma_3\}$$

$$-\frac{C}{2E}(f\beta_3+k\alpha_3)-\frac{C}{2E}\int(fd\beta_3+kd\alpha_3)(\nu\vartheta\sin\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)$$

$$+\Delta\Big(\gamma_1 p-\gamma_2 q+2\int pq\,dt+\frac{e}{2}(\gamma_2{}^2-\gamma_1{}^2-2\int(\gamma_2 p+\gamma_1 q)dt)\Big)$$

$$+\Delta\int\{f(\beta_1 d\gamma_1-\beta_2 d\gamma_2)+k(\alpha_1 d\gamma_1-\alpha_2 d\gamma_2)+f[(\beta_2 p+\beta_1 q)+k(\alpha_2 p+\alpha_1 q)]dt$$

$$+\frac{m_2}{E}\frac{c_2 l}{}\int\{(\alpha_1 dp+\alpha_2 dq)(\mathfrak{a}_2\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_2)-\alpha_3(\mathfrak{a}_2 dp-\mathfrak{a}_1 dq)\}$$

$$+\frac{m_2 c_2 l}{E}\Big(e\int\{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)d\gamma_3+(\mathfrak{a}_2\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2)$$

$$-d\alpha_3(\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1)\}+f\int\{-(\mathfrak{a}_2\beta_1-\mathfrak{a}_1\beta_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2)-d\alpha_3(\mathfrak{a}_2\beta_1-\mathfrak{a}_1\beta_2)$$

$$+k\int\{(\mathfrak{a}_2 d\gamma_1-\mathfrak{a}_1 d\gamma_2)-(\mathfrak{a}_2\alpha_1-\mathfrak{a}_1\alpha_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2)-d\alpha_3(\mathfrak{a}_2\alpha_1-\mathfrak{a}_1\alpha_2)$$

$$+(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q)dt\}\Big)-\int K_1\,dt=$$

$$\frac{\Gamma}{E}+\frac{gm_2 c_2}{E}i\int\beta_3\,dt+\frac{gm_2}{E}l\mathfrak{d}_1 t$$

$$-\frac{gm_2}{E}l\int dt(\mathfrak{a}_1\beta_2-\mathfrak{a}_2\beta_1)-\frac{gm_2}{E}\int(\mathfrak{a}_2\gamma_2-\mathfrak{b}_2\gamma_1)dt$$

$$+gm_1 s_1\int\frac{\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1}{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2}\begin{vmatrix}\cos\iota_1 & -\mathfrak{a}_1\beta_1-\mathfrak{a}_2\beta_2\\ \sin\iota_1 & \mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2\end{vmatrix}dt$$

wo unter K_1 die im Ausdrucke von $\frac{\lambda}{E}$ vorkommenden mit $\frac{T_1}{E}$ multiplicirten Glieder zusammengefasst sind. — In dieser Gleichung und in derjenigen der lebendigen Kraft (19), sind jetzt Entwickelungen nach Potenzen von ϑ vorzunehmen, die — wie erwähnt — im allgemeinen bis zur vierten Potenz von ϑ_1, in den mit kleinen Grössen multiplicirten Gliedern höchstens bis zur dritten, in den mit zwei kleinen Factoren, wie l und u behafteten Gliedern höchstens bis zur zweiten Potenz von ϑ getrieben werden sollen.

7.

In allen Gliedern, in denen man Grössen dritter gegen solche erster Ordnung vernachlässigt, ist

$$p = -\cos\chi\,\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \sin\chi\frac{d\vartheta}{dt}; \quad q = \sin\chi\,\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \cos\chi\frac{d\vartheta}{dt}$$

und da nach pag. (33) mit Vernachlässigung von Grössen zweiter gegen solche nullter Ordnung

(a) $$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$$

ist, so hat man bei der erwähnten Genauigkeit

(b) $$p = \frac{d(\vartheta\sin\chi)}{dt} = \frac{d\gamma_2}{dt}, \quad q = \frac{d(\vartheta\cos\chi)}{dt} = -\frac{d\gamma_1}{dt}$$

und mit derselben Genauigkeit

(c) $$\alpha_1 = \cos(\chi+\psi) = \sin\mu, \quad \alpha_2 = -\sin(\chi+\psi) = -\cos\mu$$

(d) $$\alpha_1 p + \alpha_2 q = \sin\mu\,p + \cos\mu\,q = \alpha_2 p - {}_1 q$$
$$= -\frac{d}{dt}\vartheta\cos(\chi+\mu) = -\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

Mit derselben Genauigkeit ergibt sich

(e) $$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} = \gamma_3(\alpha_2 p - \alpha_1 q) = -\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

(f) $$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 1 \quad \text{(vgl. pag. 36.)}$$

und wo — wie im Gliede $\frac{gm_2}{E}l(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)$ — das Quadrat von ϑ nicht vernachlässigt werden darf,

(g) $$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi$$
$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = -\vartheta\cos(\chi+\mu)$$

Für die Umgestaltung der Gleichung (22) gilt

(h) $$\int(\nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)\,dr = r(\nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)$$
$$-\int r\{(\nu\sin\psi + \vartheta\cos 2\psi)\,d\vartheta + (\nu\vartheta\cos\psi - \vartheta^2\sin 2\psi)\,d\psi\}$$

Vernachlässigt man im folgenden Ausdrucke die Grösse εn, da sie nur in dritte Potenzen von ϑ multiplicirt auftritt, so erhält man

$$\text{(i)} \quad \int (f\beta_3 + k\alpha_3)\, d\gamma_3 = 2n\cos\varphi \int \vartheta^2 \cos(\psi + \mathfrak{A})\, d\vartheta$$

$$\text{(k)} \quad f\beta_3 + k\alpha_3 + \int (f\beta_1 + k\alpha_1) d\gamma_1 + \int (f\beta_2 + k\alpha_2)\, d\gamma_2$$
$$+ \int (f d\beta_3 + k d\alpha_3)\left(\nu\vartheta \sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right) =$$
$$\int f(\alpha_3 r\, dt - \gamma_3 d\beta_3 + d\beta_3(1 + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi))$$
$$+ \int k(-\beta_3 r - \gamma_3 d\alpha_3 + d\alpha_3(1 + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)),$$

wo die Relationen pag. 24. angewendet worden sind. Derselbe Ausdruck wird

$$= \int r(f\alpha_3 - k\beta_3) dt + \int (f d\beta_3 + k d\alpha_3)\left(\frac{\vartheta^2}{2} + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)$$
$$= 2n\cos\varphi \int \left(-\vartheta\cos\psi \frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi) + \nu \frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\right)\vartheta\sin(\psi + \mathfrak{A}) dt$$
$$- 2n\cos\varphi \int (\vartheta^2\cos^2\psi + \nu\vartheta\sin\psi)\, d(\vartheta\cos(\psi + \mathfrak{A})) =$$
$$- 2n\cos\varphi \int \vartheta\, d\vartheta\, (\vartheta\cos\psi\cos\mathfrak{A} - \nu\sin\mathfrak{A}).$$

Mit Hülfe der Formeln (b) ergibt sich ferner

$$\text{(l)} \quad \gamma_1 p - \gamma_2 q + 2\int pq\, dt = \int (\gamma_1 dp - \gamma_2 dq - 2pq\, dt + 2pq\, dt)$$
$$= \int \left(\gamma_1 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2}\right) dt$$

$$\text{(m)} \quad \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2\int (\gamma_2 p + \gamma_1 q) dt$$
$$= \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2\int (\gamma_2 d\gamma_2 - \gamma_1 d\gamma_1) = c,$$

wo c die Integrationsconstante bedeutet, die zu $\frac{\Gamma}{E}$ geschlagen wird. Auch die übrigen von Δ und der Erdrotation abhängigen Glieder ergeben mit Benutzung der Formeln (b) nur eine Integrationsconstante.

(n) $(\alpha_1 dp + \alpha_2 dq)(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2) - \alpha_3(\alpha_2 dp - \alpha_1 dq) =$
$-\alpha_3[(\alpha_1+\alpha_2)dp + (\alpha_2-\alpha_1)dq],$

wobei benutzt ist, dass

$$\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 = -\sin(\mu+\chi)\vartheta = -\cos\psi\vartheta = -\alpha_3$$

ist. Nun ist

$$\alpha_1 = \cos(\chi+\psi) = \sin\mu, \quad \alpha_2 = -\sin(\chi+\psi) = -\cos\mu,$$

also mit Benutzung dieser Relationen und von (d)

$$-\alpha_3[(\alpha_1+\alpha_2)dp + (\alpha_2-\alpha_1)dq]$$
$$= -2\vartheta\cos\psi\, d(p\sin\mu - q\cos\mu) = +2\vartheta\cos\psi\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)dt$$

(o) $\int((\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)d\gamma_3 + (\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2) - d\alpha_3(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1))$
$= \int(d\gamma_3 - \alpha_3(-\alpha_1 q+\alpha_2 p)dt - \alpha_3 d\alpha_3) = \int(d\gamma_3+\alpha_3 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_3)$
$= [c+1] - \frac{\vartheta^2}{2},$

wo c die Integrationsconstante bedeutet, die mit 1 zu $\frac{\Gamma}{E}$ geschlagen wird. Hier ist (b) benutzt worden.

(p) $\int -(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 + d\alpha_3) = \text{const}$

wegen der eben unter (o) erlangten Relation

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 = -d\alpha_3$$

(q) $\int\{(\alpha_2 d\gamma_1 - \alpha_1 d\gamma_2) - (\alpha_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)(\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 + d\alpha_3)$
$+(\alpha_1 p + \alpha_2 q)dt\} = \text{Const}$

nach dem unmittelbar Vorhergehenden und nach (b).

Lässt man in den folgenden vom ersten Körper abhängigen Gliedern gleich fort, was von höherer als der dritten Ordnung ist, so folgt

$$\int K_1 dt \quad \frac{T_1}{E}\int \begin{matrix} \alpha_1\gamma_2 & -\alpha_2\gamma_1 \\ (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2) & \end{matrix}\Big| \begin{matrix} (\gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r \\ \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2 \end{matrix} \times$$
$$[-\beta_1 p - \beta_2 q + (\alpha_1 p+\alpha_2 q)(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)] - \beta_3\left(\alpha_2\frac{dp}{dt} - \alpha_1\frac{dq}{dt}\right)\Big\}dt$$

Aber es ist hier zu setzen

$$\mathfrak{a}_1\gamma_2 - \mathfrak{a}_2\gamma_1 = \vartheta\cos\psi$$
$$\mathfrak{a}_1\gamma_1 + \mathfrak{a}_2\gamma_2 = -\vartheta\sin\psi\ ;\quad \mathfrak{a}_1\beta_1 + \mathfrak{a}_2\beta_2 = 1$$
$$-\beta_1 p - \beta_2 q + (\mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q)(\mathfrak{a}_1\beta_1 + \mathfrak{a}_2\beta_2) = p(\mathfrak{a}_1 - \beta_1) + q(\mathfrak{a}_2 - \beta_2)$$
$$= p(\cos\mu - \sin(\chi+\psi)) + q(\sin\mu - \cos(\chi+\psi)) = 0$$

$$\int \frac{\mathfrak{a}_1\gamma_2 - \mathfrak{a}_2\gamma_1}{(\mathfrak{a}_1\beta_1 + \mathfrak{a}_2\beta_2)(\mathfrak{a}_1\gamma_1 + \mathfrak{a}_2\gamma_2)}\left(-\beta_3\left[\alpha_2\frac{dp}{dt} - \mathfrak{a}_1\frac{dq}{dt}\right]\right)dt =$$
$$-\int \operatorname{cotg}\psi(\sin\psi\,\vartheta\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) = -\int \vartheta\cos\psi\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)dt$$

nach (d), und hiernach

$$-\int K_1\,dt = \frac{T_1}{E}\int \vartheta\,\cos\psi\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)dt$$

Ferner wird

$$-\frac{gm_2 l}{E}\int dt(\mathfrak{a}_1\beta_2 - \mathfrak{a}_2\beta_2) =$$
$$-\frac{gm_2 l}{E}\int dt\left(\cos(\chi+\upsilon+\mu) + \sin\psi\sin(\chi+\mu)\frac{\vartheta^2}{2}\right)$$
$$= -\frac{gm_2 l}{E}\int dt\,(\mathfrak{d}_1 + \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi)$$

nach pag. 33 f.

$$= -\frac{gm_2 l}{E}\,\mathfrak{d}_1 t - \frac{gm_2 l}{E}\int \vartheta^2\sin\psi\cos\psi\,dt,$$

womit gezeigt ist, dass das der Zeit proportionale Glied in Gleichung (22) aufgehoben wird.

Sodann setzen wir

$$a_2 = s_2\cos\iota_2$$
$$b_2 = s_2\sin\iota_2,$$

wo s_2 den Abstand des Schwerpunktes des zweiten Körpers von der Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes und ι_2 den im Sinne der wachsenden ψ zu zählenden Winkel bedeutet, den das vom Schwerpunkte auf die c-achse gefällte Lot mit einer Parallelen zur a-achse bildet. Dann wird

$$\frac{gm_2}{E}\int(\mathfrak{a}_2\gamma_2 - b_2\gamma_1)\,dt = \frac{gm_2}{E}s_2\int\vartheta\sin(\chi+\iota_2)\,dt$$

zu setzen sein, da ja in den Gliedern mit kleinen Coefficienten nur

die beiden niedrigsten mit ihnen multiplicirten Potenzen von ϑ beibehalten werden sollten. Ebendeshalb wird schliesslich noch

$$\frac{gm_1 s_1}{E}\int \frac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}(\cos\iota_1(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)+\sin\iota_1(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2))\,dt$$
$$-\frac{gm_1}{E}s_1\int\vartheta\cos\psi(\cos\iota_1\vartheta\sin\psi-\sin\iota_1)\,dt$$

Durch die erwähnten Umgestaltungen, und wenn man alle bei diesen Reductionen sich ergebenden Constanten zu $\frac{h'}{E}$ resp. $\frac{\Gamma}{E}$ schlägt, ohne deshalb die Bezeichnungen zu ändern, gehen die Gleichungen (19) und (22) in die folgenden über

$$(23)\quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\left(\vartheta^2-\frac{\vartheta^4}{3}\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$
$$+\frac{C}{E}\left\{-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}+\nu\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right\}^2$$
$$+\Delta\left\{\cos 2\chi\left(\vartheta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right)-2\sin 2\chi\frac{d\psi}{dt}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right\}$$
$$+\frac{2lm_2c_2}{E}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2+\frac{T_1}{E}\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)^2=$$
$$\frac{h'}{E}-\frac{2gm_2c_2}{E}i\vartheta\cos\psi-\frac{2gm_2}{E}\left(\frac{l}{2}\vartheta^2\sin^2\psi+c_2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)\right)$$
$$-\frac{2gm_2}{E}s_2\vartheta\cos(\chi+\iota_2)+\frac{2gm_1s_1}{E}\left(\vartheta\sin\psi\sin\iota_1-\frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi\cos\iota_1\right)$$

$$(42)\quad \left(\vartheta^2-\frac{\vartheta^4}{3}\right)\frac{d\psi}{dt}-\frac{C}{E}\frac{\vartheta^2}{2}r-\frac{C}{E}\int dr\left(\nu\vartheta\sin\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)$$
$$-\frac{c}{2}\left(1-\frac{C}{2E}\right)\vartheta^2-2n\cos\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\int\vartheta^2\cos(\psi+\mathfrak{A})\,d\vartheta$$
$$+2n\cos\varphi\frac{C}{2E}\int\vartheta\,d\vartheta(\vartheta\cos\psi\cos\mathfrak{A}-\nu\sin\mathfrak{A})$$
$$-\Delta\int\left(\vartheta\sin\chi\frac{d^2(\vartheta\cos\chi)}{dt^2}+\vartheta\cos\chi\frac{d^2(\vartheta\sin\chi)}{dt^2}\right)dt$$
$$+2\frac{m_2c_2l}{E}\int\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)-\frac{m_2c_2le}{2E}\vartheta^2$$
$$+\frac{T_1}{E}\int\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)\qquad\frac{\Gamma}{E}-\frac{gm_2l}{E}\int\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\,dt$$
$$+\frac{gm_2c_2}{E}i\int\vartheta\sin\psi\,dt-\frac{gm_2}{E}s_2\int\vartheta\sin(\chi+\iota_2)\,dt$$
$$+\frac{gm_1s_1}{E}\int\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1-\cos\iota_1\vartheta\sin\psi)\,dt.$$

§ 2.

Erste Annäherung zur zweiten Integration der Differentialgleichungen der Bewegung.

8.

Um die ersten Integrale (23) und (24) der Bewegungsgleichungen nochmals zu integriren, will ich den Weg successiver Approximation einschlagen, und werde in erster Näherung die mit den kleinen Factoren

$$\nu,\ \Delta,\ l,\ \frac{T_1}{E},\ i,\ s_2,\ m_1 s_1,\ \gamma_1$$

behafteten Glieder vernachlässigen, zugleich aber auch die dritten und vierten Potenzen von ϑ.

Ich setze also für die erste Näherung

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \vartheta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h'' - \frac{2gm_2c_2}{E}\frac{\vartheta^2}{2} \tag{25}$$

$$\vartheta^2\frac{d\psi}{dt} = \Gamma' + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\vartheta^2 \tag{26}$$

wo jetzt einfach mit Vernachlässigung von i

$$e = 2a\sin\varphi$$

zu setzen ist, Γ' und h'' sich aber von Constanten um Grössen unterscheiden, die wir in der ersten Näherung unterdrücken wollen. Abgesehen von einer Constanten im Ausdrucke von h'' haben wir

$$\begin{aligned}(27)\quad h'' = {} & \vartheta^4\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{C}{E}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} + \nu\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)^2 \\ & + \Delta\left\{\left(\frac{d(\vartheta\cos\chi)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d(\vartheta\sin\chi)}{dt}\right)^2\right. \\ & - \left(\frac{T_1}{E} + 2\frac{lm_2c_2}{E}\right)\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2 \\ & - \frac{2gm_2c_2}{E}i\vartheta\cos\psi - \frac{2gm_2}{E}\left(\frac{l}{2}\vartheta^2\sin^2\psi - c_2\frac{\vartheta^4}{24}\right) \\ & - \frac{2gm_2}{E}s_2\vartheta\cos(\chi+\iota_2) + \frac{2gm_1s_1}{E}\left(\vartheta\sin\psi\sin\iota_1 - \frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi\cos\iota_1\right)\end{aligned}$$ [1]

[1] Dieses Glied kommt wegen Unterdrückung von i in e in der Gleichung

$$(28)\quad \frac{dI'}{dt} = \frac{4\vartheta^3}{3}\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\vartheta^4}{3}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(1 - \frac{C}{2E}\right) 2n \cos\varphi \cos\mathfrak{A}i\,\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+ \frac{C}{E}\Big\} \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}\left(- \vartheta \cos\psi \frac{d(\vartheta \sin\psi)}{dt} + \nu \frac{d(\vartheta(\cos\psi)}{dt}\right)$$

$$+ (\vartheta^2\cos^2\psi + \nu\vartheta\sin\psi)\frac{d}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} + \nu\frac{d\,\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)$$

$$+ \Delta\left\{\vartheta\sin\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi) + \vartheta\cos\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi)\right\}$$

$$- \left(\frac{T_1}{E} + \frac{2m_2c_2}{E}l\right)\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) + \frac{2m_2c_2}{E}le\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+ 2n\cos\varphi\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\vartheta^2\cos(\psi + \mathfrak{A})\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{E}n\cos\varphi\cos\mathfrak{A}\,\vartheta^2\cos\psi\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+ \nu\frac{C}{E}n\cos\varphi\sin\mathfrak{A}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{gm_2c_2}{E}i\vartheta\sin\psi$$

$$- \frac{gm_2s_2}{E}\vartheta\sin(\chi + \iota_2) + \frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1 - \vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

Wir haben hier Producte der Grössen

$$\mathfrak{d}_1,\ l,\ \nu,\ \frac{T_1}{E},\ m_1s_1,\ \Delta,\ i$$

immer vernachlässigt.

So ist es gekommen, dass die Grösse $\mathfrak{d}_1$ im Ausdrucke der h'' und I'' nicht mehr explicite vorkommt, und wenn sie auch implicite im Ausdrucke von

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{d}_1 + i\vartheta\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi$$
$$- \frac{\vartheta^4}{4}(\cos^3\psi\sin\psi - \tfrac{1}{6}\sin\psi\cos\psi)$$

vorkommt, so kann sie nach Ausführung der betreffenden Rechnungen doch immer nur als Factor einer anderen kleinen Grösse erscheinen, und wird deshalb auch in unsere schliesslichen Ergebnisse gar nicht eingehen, weil wir die durch Producte der störenden Kräfte bewirkten Aenderungen der Bewegung von der Betrachtung ausschliessen.

Wenn nun auch $\mathfrak{d}_1$ in die Störungen erster Ordnung gar nicht eingeht, so soll doch nicht behauptet werden, dass die Sorgfalt, die bei Anfertigung der cardanischen Aufhängung darauf verwendet wird, dass die Schneiden auf einander senkrecht stehen, ungerechtfertigt sei, weil immerhin Glieder mit den Factoren

$$l\mathfrak{d}_1,\quad \nu\mathfrak{d}_1,\quad \Delta\mathfrak{d}_1\quad \frac{T_1}{E}\mathfrak{d}_1,\quad m_1 s_1 \mathfrak{d}_1,\quad s_2\mathfrak{d}_1$$

von merklichem Einflusse auf das Endresultat sein könnten.

Dass $\mathfrak{d}_1$ im Ausdrucke von χ erscheint, ändert an der Bewegung nichts, da dieselbe ja schon durch die Variablen ϑ und ψ allein bestimmt ist [1]).

Um die Bedeutung der in den Gleichungen (25) und (26) als constant angesehenen Grössen zu erkennen, die mit h'' und Γ' bezeichnet sind, denke man sich das Pendel aus der Gleichgewichtslage um den Winkel ε entfernt und dort mit einer Geschwindigkeit v in der Richtung angestossen, die auf der durch die Lotlinie und den Schwerpunkt des Pendels bestimmten Ebene senkrecht steht, dann wird — da ja der Schwerpunkt des Ganzen vorläufig als in der c-achse liegend und diese in der Ruhelage mit der w-achse zusammenfallend angesehen wird — für den betrachteten Anfangspunkt der Bewegung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = v, \quad \vartheta = \varepsilon$$

$$h'' = \varepsilon^2 v^2 + \frac{g m_2 c_2}{E}\varepsilon^2 \tag{29}$$

$$\Gamma' = \varepsilon^2 v - \frac{e}{2}\varepsilon^2\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

womit h'' und Γ' durch zwei andere Grösssen ε und v ausgedrückt sind, die eine einfache mechanische Bedeutung haben. Sucht man umgekehrt ε und v durch h'' und Γ' auszudrücken, so werden ihre Werte mehrdeutig. Denn aus der zweiten Gleichung folgt:

$$v = \frac{\Gamma'}{\varepsilon^2} - \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right),$$

und dies in die erste Gleichung substituirt, liefert

$$h'' = \varepsilon^2\left(\frac{\Gamma'^2}{\varepsilon^4} - \frac{e\Gamma'}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2\right) + \frac{g m_2 c_2}{E}\varepsilon^2$$

und nach einigen Reductionen, wenn

---

1) Die wahre Bedeutung der cardanischen Aufhängung beruht in der Tat nicht auf einer mechanischen, sondern einer geometrischen Betrachtung. Diese lehrt, dass für kleine Werte von $\mathfrak{d}_1$ die gebräuchlichen Ausschläge des Apparates sämtlich möglich sind, und dass überhaupt nur, wenn $\mathfrak{d}_1$ einen beträchtlichen — mit Leichtigkeit zu vermeidenden — Wert hat, nicht mehr sämtliche grösseren Ausschläge zu erreichen sind.

$$-4\Gamma'^2 = a, \quad 4\left(h'' - e\Gamma'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\right) = b,$$

(δ)

$$\frac{gm_2c_2}{E} + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2 = \omega^2$$

gesetzt wird:

(ε)

$$0 = -a - b\varepsilon^2 + 4\omega^2\varepsilon^4$$

$$\varepsilon^2 = \frac{b \pm \sqrt{16a\omega^2 + b^2}}{8\omega^2}$$

wo man für ε^2 zwei positive reelle Wurzeln gefunden hat, deren grössere wir mit ε^2 weiter bezeichnen wollen, während wir für die kleinere die Benennung ε'^2 einführen wollen. Unter ε und ε' wollen wir fernerhin wesentlich positive Grössen verstehen.

Wir können jetzt noch Γ' und h'' durch ε^2 und ε'^2 ausdrücken.

In der quadratischen Gleichung (ε) für ε^2 ist nämlich

$$\varepsilon^2\varepsilon'^2 = -\frac{a}{4\omega^2}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = \frac{b}{4\omega^2}$$

$$\varepsilon^2\varepsilon'^2 = \frac{\Gamma'^2}{4\omega^2}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = \frac{h''}{\omega^2} - \frac{e\Gamma'}{\omega^2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

Setzt man ferner fest, dass unter ω derjenige Wert von

$$\sqrt{\frac{gm_2c_2}{E} + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2}$$

verstanden werden soll, der mit Γ' gleiches Vorzeichen hat, also auch im allgemeinen mit v im Vorzeichen übereinstimmt [1] — wenn nicht gerade

$$0 < v < \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

ist — , so erhält man die Relationen

(30)

$$\Gamma' = \omega\varepsilon\varepsilon'$$

$$h'' = \omega^2(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) + e\,\omega\varepsilon\varepsilon'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

1) In dem Specialfalle, wo $\Gamma' = 0$ ist, soll ω auch positiv gerechnet werden; ω soll also positiv sein, wenn das Pendel im Sinne der wachsenden ψ herumschwingt oder durch die Ruhelage geht, negativ im anderen Falle.

Um jetzt die Differentialgleichungen (25) und (26) zu integriren setzen wir den Wert von $\frac{d\psi}{dt}$ aus der zweiten in die erste ein, und erhalten

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{e^2}{4}\vartheta^2\left(1-\frac{C}{2E}\right)^2 + e\Gamma'\left(1-\frac{C}{2E}\right) + \frac{\Gamma'}{\vartheta^2} = h'' - \frac{gm_2c_2}{E}\vartheta^2$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $4\vartheta^2$, so lässt sie sich schreiben

$$\left(\frac{d(\vartheta^2)}{dt}\right)^2 = -4\Gamma'^2 + 4\vartheta^2\left(h'' - e\Gamma'\left(1-\frac{C}{2E}\right)\right)$$
$$-4\vartheta^4\left(\frac{gm_2c_2}{E} - \frac{e^2}{4}\left(1-\frac{C}{2E}\right)^2\right)$$

also nach den Bezeichnungen unter (δ) der vorigen Seite

$$dt = \frac{\pm d(\vartheta^2)}{\sqrt{a+b\vartheta^2 - 4\omega^2\vartheta^4}}$$

Aber der Nenner hat nach der vorigen Seite (ε) genau die Nullstellen ε^2 und ε'^2, also wird

$$dt = \frac{\pm (d\vartheta^2)}{\sqrt{4\omega^2(\varepsilon^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \varepsilon'^2)}}$$

und nach den Regeln der Integralrechnung

$$t = t_0 \mp \frac{2}{2\omega}\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \vartheta^2}{\vartheta^2 - \varepsilon'^2}}$$

wo t_0 die Integrationsconstante bedeutet. Hieraus

$$\vartheta^2 = \varepsilon^2\cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2\sin^2(\omega t + \eta), \tag{31}$$

wo jetzt

$$-\omega t_0 = \eta$$

die Integrationsconstante bedeutet. Man erkennt, dass ε und ε' resp. der grösste und der kleinste Wert sind, die ϑ annehmen kann.

In dem Ausdrucke für ω^2

$$\omega^2 = \frac{gm_2c_2}{E} + \frac{e^2}{4}\left(1-\frac{C}{2E}\right)^2$$

dürfen wir unbedenklich den zweiten Teil vernachlässigen. Die

Wirkung dieses Termes wächst — wie Hansen [1]) gezeigt hat — mit der Länge des Pendels, und die Schwingungsdauer wird für das Secundenpendel dadurch um ihren drei- bis viertausend-millionsten Teil, für ein 900m langes Pendel auch erst um ihren viermillionsten Teil geändert. Unter der Schwingungsdauer soll nämlich die Zeit verstanden werden, die von einer grössten Elongation des Pendels bis zur nächsten verstreicht. Dieselbe wird hiernach

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{E}{gm_2 e_2}}.$$

Aus den Gleichungen (29) und (30) folgt

$$\varepsilon' = \frac{\Gamma'}{\omega \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\omega}\left(v - \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\right)$$

Die kleinste Elongation hängt also — freilich in geringem Masse — von der Erdrotation ab, und ist, selbst wenn die anfänglich dem Pendel erteilte Geschwindigkeit Null ist, nicht gleich Null, während ω in diesem Falle einen geringen negativen Wert hat. Soll wie wir festgesetzt haben $\varepsilon > \varepsilon'$ sein, so muss der anfängliche Seitenstoss der Bedingung genügen

$$v \lessgtr \omega + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) \quad \text{für} \quad \omega \gtrless 0$$

9.

Um die Grösse ψ durch Integration als Function der Zeit zu ermitteln gehe ich auf Gleichung (26) zurück, die vermöge der Gleichungen (30) und (31) sich folgendermassen schreiben lässt

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) + \frac{\Gamma'}{\vartheta^2} = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) + \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon^2 \sin^2(\omega t + \eta)}$$

und integrirt

1) a. a. O. pag. 35.

(32) $\psi - \psi_0 = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C'}{2E}\right)t + \text{arc tang}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\,\text{tang}\,(\omega t + \eta)\right)$ [1]

gibt, wo ψ_0 die Integrationsconstante bedeutet.

In den grössten Elongationen des Pendels wird der zweite Teil dieses Ausdrucks gleich Null; der Wert, den der Winkel ψ in der grössten Elongationen hat, erleidet also eine der Zeit proportionale Aenderung, was man — für den Fall, dass das Pendel durch die Ruhelage hindurchschwingt, ε' also Null wird — so auszudrücken pflegt, dass die sogenannte Schwingungsebene eine der Zeit proportionale Drehung mit der Geschwindigkeit $\frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$ erfährt. Die Theorie ergibt also bei Vernachlässigungen von $\frac{C}{2E}$ gegen 1, die bekannte Erscheinung. Das Glied

$$-\frac{e}{4}\,\frac{C}{E}\,t,$$

das im Ausdrucke von $\psi - \psi_0$ vorkommt, würde sich übrigens auch aus der Hansen'schen Formel für $\psi - \psi_0$ ergeben haben, die mit unseren Bezeichnungen lautet:

$$\psi - \psi_0 = \frac{e}{2}t + \tfrac{1}{2}n'\,\frac{C}{E}\,t + \text{arc tang}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\,\text{tang}\,(\omega t + \eta)\right)$$ [2]

Hansen betrachtet nämlich ein — übrigens, unrealisirbares — Pendel, das um einen mit der Erde fest verbundenen Punkt in jedem Sinne ohne Reibung drehbar ist. Er nimmt an, dass dem Pendel um die durch diesen Aufhängungspunkt und den Schwerpunkt gelegte Achse eine Rotationsgeschwindigkeit n' erteilt sei, die das Pendel, wenn sie positiv ist, auf der südlichen Hemisphäre im Sinne der Erdrotation auf der nördlichen im entgegengesetzten Sinne bewegen, wenn sie negativ ist, aber die entgegengesetzte Wirkung äussern würde. Eine solche Geschwindigkeit um die genannte Achse besitzt aber auch das Gaussische Pendel, denn dasselbe erhält durch die Erdrotation um jene Achse die Drehungsgeschwindigkeit

$$\frac{e}{2} = n \sin \varphi$$

im Sinne der Erdrotation auf der nördlichen, im entgegengesetzten auf der südlichen Halbkugel, wo ja $\sin\varphi$ negativ ist.

1) Hansen a. a. O. pag. 36, 2) a. a. O. pag. 36. unten.

Wir haben also, wenn wir unsere Formel aus der Hansen'schen ableiten wollen,

$$n' = -n \sin \varphi = -\frac{e}{2}$$

zu setzen und erhalten

$$\tfrac{1}{2} n' \frac{C}{E} t = -\frac{e}{4} \frac{C}{E} t,$$

womit die Uebereinstimmung unseres Gliedes mit dem Hansen'schen constatirt ist.

Um über die Grösse der Wirkung dieses Gliedes ein Urteil zu gewinnen, werden wir das Verhältniss $\frac{C}{E}$ des kleinsten Trägheitsmomentes zur halben Summe der beiden grösseren Hauptträgheitsmomente unseres Pendels untersuchen.

Da das Pendel aus einer leichten Stange besteht, die am Ende eine schwere Linie trägt, so wird es — bei alleiniger Berücksichtigung der Linse — darauf ankommen, das Verhältniss des Trägheitsmomentes iner solchen um ihre Umdrehungsachse zu demjenigen um eine Achse zu berechnen, die auf dieser senkrecht steht. Die Linse sei aus zwei Kugelsegmenten zusammengesetzt. Bedeutet d die Höhe, l [1]) den Radius der ebenen Begrenzungsfläche eines solchen, ϱ die Dichtigkeit des homogen gedachten Körpers, so ergibt sich als Trägheitsmoment desselben um die Umdrehungsachse

$$C' = \tfrac{1}{2} \varrho \pi d \left(\frac{l^4}{3} + \frac{d^4}{5} \right),$$

also für eine biconvexe Linse mit gleichen Radien der sphärischen Begrenzungsflächen, der Dicke $2d$ und dem Durchmesser $2l$:

$$(\mathrm{I}) \quad C = \varrho \pi d \left(\frac{l^4}{3} + \frac{d^4}{5} \right) - M \frac{\frac{l^4}{3} + \frac{d^4}{5}}{l^2 + \frac{d^2}{3}},$$

wo

$$M = \varrho \pi d \left(l^2 + \frac{d^2}{3} \right)$$

die Masse der Linse bedeutet.

---

1) In dieser Bedeutung wird der Buchstabe l bald nicht mehr gebraucht werden.

Andererseits findet sich als Trägheitsmoment der Linse um eine durch ihren Mittelpunkt gehende zur Umdrehungsachse senkrechte Achse

$$\text{(II)}\quad F = \varrho\pi d\left(\tfrac{7}{6}d^2l^2 - \tfrac{4}{5}d^4 + \tfrac{1}{6}l^4\right) = M\frac{\frac{l^4}{6} + \frac{7}{6}d^2l^2 - \frac{4}{5}d^4}{l^2 + \frac{d^2}{3}}$$

Um eine mit der letzten Achse parallele, im Abstande c_2 von dieser befindliche Achse ist das Trägheitsmoment

$$\text{(III)}\quad E = M\left(c_2^2 + \frac{\frac{l^4}{6} + \frac{7}{6}d^2l^2 - \frac{4}{5}d^4}{l^2 + \frac{d^2}{3}}\right)$$

Im folgenden Täfelchen sind die Grössen $\frac{C}{Ml^2}$ und $\frac{F}{Ml^2}$ mit dem Argumente $\frac{d}{l}$ tabulirt, als Extreme, zu welchen die Linse degeneriren kann, sind die kreisförmige Scheibe für $\frac{d}{l} = 0$ und die Kugel für $\frac{d}{l} = 1$ mit in dasselbe aufgenommen worden.

d/l	$C : Ml^2$	$F : Ml^2$
0,0	0,33333	0,16667
0,1	0,33225	0,17766
0,2	0,32926	0,20926
0,3	0,32520	0,25746
0,4	0,32132	0,31632
0 5	0,31923	0,37692
0,6	0,32076	0,43124
0,7	0,32782	0,46957
0,8	0,34223	0,48267
0,9	0,36579	0,46204
1,0	0,40000	0,40000

Da der Abstand der letzterwähnten Achse von der Linse im Verhältniss zu den Dimensionen derselben ziemlich gross ist, werden wir für unsere Zwecke in dem Ausdrucke

$$\frac{C}{E} = \frac{C : Ml^2}{\frac{{c_1}^2}{l^2} + \frac{F}{Ml^2}}$$

das zweite Glied des Nenners gegen das erste vernachlässigen dürfen. Wir betrachten folgende Specialfälle:

1) Die Kugel.

Hier ist

$$\frac{\partial}{l} = 1, \quad \frac{C}{Ml^2} : \frac{{c_2}^2}{l^2} = 0{,}01 \quad \text{für} \quad \frac{l}{c_2} = \frac{1}{6{,}325}$$

$$= 0{,}001 \quad \text{für} \quad \frac{l}{c_2} = \frac{1}{20}$$

2) Die ebene Scheibe.

Hier ist

$$\frac{d}{l} = 0; \quad \frac{C}{M{c_2}^2} = 0{,}01 \quad \text{für} \quad c_2 : l = 5{,}7735$$

$$= 0{,}001 \text{ für} \quad c_2 : l = 18{,}2575.$$

3) Die Linse, deren

$$\frac{d}{l} = 0{,}45$$

ist. Hier ist nämlich, wie man durch Differentiation findet, das Verhältniss $C : Mc_2^2$ so klein als möglich. Für diese günstigste Linsenform [1]) ergibt sich

$$C : Mc_2^2 = 0{,}001 \quad \text{etwa für} \quad c_2 : l = 17{,}9.$$

Jedenfalls ist aus diesen Betrachtungen klar, dass die Herabdrücknug des Wertes von $\frac{C}{E}$ auf 0,001 immer zu erreichen ist, braucht doch bei günstigst möglicher Linsenform der Durchmesser der Linse kaum kleiner als der neunte Teil der Pendellänge zu sein.

Hiernach wird die Drehung der sogenannten Schwingungsebene jedenfalls kaum um mehr als den zweitausendsten Teil ihres Betrages durch das Glied $-\frac{e}{4}\frac{C}{E}$ verringert.

---

1) Es soll nicht behauptet werden, dass im Falle $\frac{d}{l} = 0{,}45$ die für die Zwecke des Apparates günstigste Linsenform sich ergebe, sondern das, dass dann jenes Verhältniss am meisten herabgedrückt wird.

Die vom Aufhängungspunkt nach dem Schwerpunkte des Pendels gezogene Gerade schneidet eine in der Entfernung 1 vom Aufhängungspunkte befindliche Ebene im Laufe der Zeit in einer Curve, deren Gleichung wir ermitteln wollen.[1])

In dieser Ebene gehe die $+x$ achse nach Süden, die $+y$-achse nach Westen, so ist

$$x = \vartheta \cos(\psi + \mathfrak{A})$$

$$y = \vartheta \sin(\psi + \mathfrak{A})$$

und setzt man

$$\psi_0 + \mathfrak{A} = \alpha$$

$$M = \psi_0 + \mathfrak{A} + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)t = \alpha + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)t,$$

so wird nach Gleichung (32)

$$(33) \quad \operatorname{tang}(\psi - M + \mathfrak{A}) = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \operatorname{tang}(\omega t + \eta)$$

$$\cos^2(\omega t + \eta) = \frac{\varepsilon'^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon'^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A}) + \varepsilon^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}$$

$$\sin^2(\omega t + \eta) = \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon'^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A}) + \varepsilon^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}$$

Durch Substitution dieser Werte in die Formel

$$\vartheta^2 = \varepsilon^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \sin^2(\omega t + \eta)$$

ergibt sich nach geringen Reductionen

$$(34) \quad \frac{\vartheta^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon^2} + \frac{\vartheta^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon'^2} = 1$$

und hieraus folgt das Resultat[2]), „dass das Pendel sich auf der Oberfläche eines geraden Kegels mit elliptischer Basis bewegt, deren Axen stets mit der Winkelgeschwindigkeit

$$n \sin \varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

ihre Lage gegen den Meridian des Beobachtungsortes ändern."

---

1) Hansen, a. a. O. pag. 37.

2) Hansen a. a. O. pag. 37. unten.

10 [1]).

Wir gehen etwas näher auf den Fall ein, wo der seitliche Stoss so geführt ist, dass nahe

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

ist, wo also nahe

$$v = \omega + n \sin\varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

ist. Es sei

$$\varepsilon' = \varepsilon - \gamma$$

und γ in Beziehung auf ε und ε' eine kleine Grösse.

Dann folgt aus Gleichung (33), wenn zugleich, wie künftighin immer der Kürze halber

$$\frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) = \mathfrak{f}$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tang}(\psi + \mathfrak{A} - \alpha - \mathfrak{f}t) = \operatorname{tang}(\omega t + \eta) - \frac{\gamma}{\varepsilon}\operatorname{tang}(\omega t + \eta)$$

$$(35) \quad \psi = \alpha - \mathfrak{A} + \eta + (\omega + \mathfrak{f})t - \frac{\gamma}{2\varepsilon}\sin 2(\omega t + \eta).$$

Die Zeit, welche — die Erdrotation fortgedacht — zu einem Umlaufe des Pendels erforderlich wäre, wird also durch die Erddrehung modificirt.

ω hat jetzt nahe den Wert

$$\omega = r - \mathfrak{f},$$

ist also positiv, wenn der anfängliche Stoss das Pendel im Sinne der wachsenden, negativ, wenn er es im Sinne der abnehmenden ψ bewegt, $\mathfrak{f}$ ist positiv auf der südlichen, negativ auf der nördlichen Halbkugel. Die Zeit eines Umlaufs wird also vermehrt, wenn das Pendel im Sinne der Erdrotation läuft, vermindert, wenn es im entgegengesetzten Sinne umläuft.

Die Gleichung (35) gibt für $t = 0$ [2])

$$\psi = \alpha - \mathfrak{A} + \eta.$$

1) Hansen a. a. O. pag. 39.

2) Hansen a. a. O. pag. 40.

Die Zeit, in welcher das Pendel i Umläufe macht, wird gefunden, indem man

$$\psi - \alpha + \mathfrak{A} - \eta = \pm 2i\pi$$

setzt, wo das obere, resp. untere Zeichen gilt, jenachdem ω positiv oder negativ ist.

Bedeutet τ die Zeit des i-maligen Umlaufs, so ist also

$$\pm 2i\pi = (\omega + \mathfrak{f})\tau - \frac{\gamma}{2\varepsilon}\sin 2(\omega t + \eta)$$

Also mit successiver Approximation

$$\tau = \pm \frac{2i\pi}{\omega + \mathfrak{f}} = \pm \frac{2i\pi}{\omega}\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\right)$$

$$2\omega\tau = \pm 4\pi i\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\right)$$

$$\sin 2\omega\tau = \mp \frac{4\pi i\mathfrak{f}}{\omega}$$

Durch diese Substitution erhalten wir in zweiter Näherung

$$\pm 2i\pi = (\omega + \mathfrak{f})\tau - \frac{\gamma}{2\varepsilon}\frac{4\pi i\mathfrak{f}}{\omega}$$

$$(36) \qquad \tau = \pm \frac{2i\pi\left(1 - \frac{\gamma}{\varepsilon}\frac{\mathfrak{f}}{\omega}\right)}{\omega + \mathfrak{f}} = -\frac{2i\pi}{\omega}\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right)$$

Bedeutet demnach τ_2 die Zeit eines Umlaufes des Pendels im Sinne der wachsenden, τ_1 eines solchen im Sinne der abnehmenden ψ, so ist

$$(37) \qquad \tau_2 - \tau_1 = -\frac{4\pi}{\omega^2}\mathfrak{f}\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^{1)}$$

Hieraus folgert Hansen, dass der Unterschied $(\tau_2 - \tau_1)$ von der anfänglichen Elongation ε des Pendels von der Lotlinie unabhängig sei, wenn das Pendel genau in einem Kreise laufe, dass dieser Unterschied sich aber wenig ändere, wenn die Bahn von einem Kreise wenig verschwinden, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ also klein sei,

1) Hansen erhält pag. 40. a. a. O. den Factor $1 + \frac{\gamma}{2\varepsilon}$ in Folge eines Rechenfehlers; der Unterschied ist nicht wesentlich.

Nach Gleichung (36) ist die Zahl der Umläufe des Körpers in einem mittleren Sonnentage

$$i = \pm \frac{86400}{2\pi} \frac{\omega}{} \left(1 + \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right)$$

und hiernach die Zahl der Umläufe, die das Pendel in derselben Zeit vermöge der Erddrehung mehr oder weniger macht,

$$\pm \frac{86400}{2\pi} \mathfrak{f}\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right) = \pm \frac{86400}{2\pi} n . \sin\varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$

wo das untere Zeichen gilt, wenn die Umläufe im Sinne der abnehmenden, das obere, wenn sie im Sinne der wachsenden ψ stattfinden.

Nun ist

$$\frac{86400}{2\pi} n = 1{,}0027$$

nichts anderes als das Verhältniss des mittleren Sonnentages zum Sterntage. Die Zahl der vom Pendel innerhalb eines Sterntages mehr oder weniger vollführten Umläufe ist demnach

$$\pm \sin\varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)\left(1 \pm \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$

Läuft also z. B. das Pendel an einem der beiden Pole im Sinne der Erdrotation, so macht es für den mit der Erde fortbewegten Beobachter in einem Sterntage

$$\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right) = 1 - \frac{C}{2E} + \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Schwingungen weniger, im entgegengesetzten Sinne laufend aber ebensoviel mehr, als es, wenn die Erddrehung nicht vorhanden wäre, ausführen würde. Bei Vernachlässigung von $\frac{C}{2E}$ und $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ gegen 1 ist das genau eine Schwingung — ein Resultat, dass sich a priori hätte einsehen lassen.

11.

Das von uns betrachtete System ist seiner Lage nach zu einer bestimmten Zeit t vollständig bestimmt, wenn man die Werte zweier Variablen ϑ und ψ zu dieser Zeit kennt — haben wir doch vermöge des Zwanges des Systems die beim Drehungsproblem sonst noch gebrauchte Grösse χ durch ϑ und ψ ausgedrückt. Es war nämlich bis auf Grössen zweiter Ordnung in ϑ, ν, $\mathfrak{d}_1$, etc.

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{d}_1 + \nu\vartheta\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin\varphi\cos\psi$$

und bei Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung gegen die anderen:

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{d}_1$$

Hieraus folgt, dass eine im Pendelkörper feste Ebene eine der Zeit proportionale Drehung erfährt, die derjenigen der sogenannten Schwingungsebene dem absoluten Werte nach gleich, dem Sinne nach aber entgegengesetzt ist.

Das hätte aus der Eigentümlichkeit des Zwanges der cardanischen Aufhängung sich a priori erschliessen lassen, und ist auch schon vorher bemerkt worden [1]).

Während also Hansen [2]) für sein unrealisirbares Pendel findet, dass eine Ebene, die zu einer gewissen Zeit durch die Ruhelage des Schwerpunktes und den Pendelkörper gelegt und im Pendelkörper fest bleibend angesehen wird, in jeder grössten Elongation wieder die Ruhelage des Schwerpunktes in sich enthält, finden wir hier, dass eine solche Ebene eine der Zeit proportionale Drehung im Sinne der Erdrotation erfährt. Freilich hätte aus einer Hansen'schen Formel [3]), die wir für unsere Zwecke

$$\chi = \text{Const} + n'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)t$$

schreiben wollen, dieses Resultat sich auch ableiten lassen, weil nach pag. 50. zu setzen ist:

$$n' = -n\sin\varphi$$

indem der Sinn der wachsenden Azimuthe ψ auf der südlichen Hemisphäre mit dem der Erdrotation übereinstimmt, auf der nördlichen ihr entgegengesetzt ist.

---

1) Vgl. Bruns a. a. O.

2) a. a. O. pag. 41. f.

3) a. a. O. pag. 41. unten.

§ 3.

Fernere Annäherungen zur Integration der Bewegungsgleichungen.

12.

Wir haben bisher die Gröscen h'' und Γ' als Constanten der ersten Integration angesehen, in Wahrheit sind sie aber Functionen der Zeit, und die Ausdrücke von h'' und $\frac{d\Gamma''}{dt}$ finden sich auf pag. 44 f. Sieht man h'' und Γ' nicht mehr als constant an, so werden die Grössen ε und ε', die sich aus den Gleichungen (30) pag. 46. durch h'' und Γ'' einfach ausdrücken lassen, auch nicht mehr constant, ebensowenig aber auch die in der zweiten Integration durch die erste Näherung erlangten „Constanten," η (pag. 47. unten) und α (pag. 53.). Um von den erlangten Integralen zu richtigeren überzugehen, wird man also die Grössen

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \eta, \quad \alpha$$

von nun ab als Functionen der Zeit ansehen, die sich freilich von Constanten wenig unterscheiden, und wird sich zu jenem Uebergange der Methode der Variation der Constanten bedienen, die Hansen zuerst auf die Theorie des Pendels angewendet hat. Der Uebergang wird aber hier wesentlich einfacher sein als bei Hansen, weil wir uns auf Glieder vierter Ordnung in ϑ in den Hauptgliedern beschränkt,[1] und dieselben in die, die Bewegung störenden Glieder mit aufgenommen haben. Der Weg, auf dem Hansen zu genaueren Formeln gelangt, ist der folgende[1]):

$$\vartheta'^2 = \varepsilon^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \sin^2(\omega t + \eta) \tag{31}$$

$$\psi = \alpha - \mathfrak{A} + \mathfrak{f} t + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \operatorname{tang}(\omega t + \eta)\right) \tag{32}$$

wo

$$\psi_0 = \alpha - \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{f} = \alpha \sin\varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

gesetzt ist, waren die in der ersten Näherung erlangten Integrale der Bewegungsgleichungen.

1) Hansen, a. a. O. pag. 43. ff.

In ihnen sind jetzt rechter Hand die Grössen

$$t;\quad \varepsilon,\quad \varepsilon',\quad \eta,\quad \alpha$$

als variabel zu betrachten. Da die Form der Integrale in der zweiten Annäherung dieselbe bleiben soll, so müssen auch ihre vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit gelten. Es muss also sein

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \frac{d(\vartheta^2)}{dt} &= \frac{\partial(\vartheta^2)}{dt} + \frac{\partial(\vartheta^2)}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} \end{aligned}$$

Nun sind in erster Näherung ϑ^2 und ψ so bestimmt worden, dass

$$\frac{d(\vartheta^2)}{dt} = \frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial t},\quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ist Hieraus folgen die vier Gleichungen

$$\text{(A)}\quad \frac{\vartheta d\vartheta}{dt} = -\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

$$\text{(B)}\quad \frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta)+\varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta)} = \mathfrak{f} + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}$$

$$\text{(C)}\quad 0 = \varepsilon\cos^2(\omega t+\eta)\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon'\sin^2(\omega t+\eta)\frac{d\varepsilon'}{dt} - (\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)\frac{d\eta}{dt}$$

$$\text{(D)}\quad 0 = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\varepsilon'}{\vartheta^2}\frac{d\varepsilon}{dt}\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta) + \frac{3}{\vartheta^2}\frac{d\zeta'}{d\varepsilon}\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta) + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}\frac{d\eta}{dt}$$

Die Gleichungen (A) und (B) müssen differentiirt noch gelten, also ergibt sich vermöge der Relation [1])

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 &= \frac{\omega^2}{\vartheta^3}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2\sin^2(\omega t+\eta)\cos^2(\omega t+\eta) \\ &= \omega^2\vartheta - \frac{\omega^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\vartheta^3} - \frac{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}{\vartheta}\cos 2(\omega t+\eta) \end{aligned}$$

1) Hansen a. a. O. pag. 45.

$$\text{(II)}\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2\vartheta + \frac{\omega^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\vartheta^3} - 2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{\omega}{\vartheta}\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

$$+2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{\omega}{\vartheta}\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta) - \frac{\omega}{\vartheta}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\frac{d\eta}{dt}\cos 2(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{2\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^3}\frac{d\vartheta}{dt} + \left(\frac{\varepsilon}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon'\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\omega}{\vartheta^4}(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta),$$

$$+2\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^4}\frac{d\eta}{dt}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

Wir hatten die Werte (31) und (32) von ϑ^2 und ψ durch Integration der Differentialgleichungen

$$\text{(25)}\quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \vartheta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h'' - 2\frac{gm_2c_2}{E}\frac{\vartheta^2}{2} = h'' - \omega^2\vartheta^2$$

$$\text{(26)}\quad \vartheta^2\frac{d\psi}{\vartheta t} - \mathfrak{f}\vartheta^2 = \Gamma'$$

erlangt. Durch Differentiation dieser Gleichungen mit Rücksicht auf die Variabilität von Γ' und h'' ergeben sich andere Gleichungen für $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ und $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ die mit den Gleichungen (II) verglichen, zwei neue Differentialgleichungen für die Grössen ε, ε' und η liefern müssen. Durch Differentiation von (25) und (26) ergibt sich:

$$2\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -2\vartheta^2\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2\omega^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{dh''}{dt}$$

$$\text{(III)}\quad \vartheta^2\frac{d^2\psi}{dt^2} = -2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + 2\mathfrak{f}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Gamma'}{dt}$$

und nach Substitution des Wertes von $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ aus der zweiten in die erste von diesen Gleichungen

$$\text{(IV)}\quad 2\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2\omega^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} - 4\mathfrak{f}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} - 2\frac{d\Gamma'}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (26)

$$\text{(26)}\quad \frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{\Gamma'}{\vartheta^2} = \mathfrak{f} + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}$$

unter Vernachlässigung von $\mathfrak{f}^2$ gegen ω^2 [1])

1) cf. pag. 47. unten.

$$\text{(IV)}\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2\vartheta + \omega^2\frac{\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\vartheta^3} + \frac{\frac{dh''}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\frac{d\Gamma'}{dt}}{2\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt}}$$

$$\text{(III)}\quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{2\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^3}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{d\Gamma'}{dt}$$

Demnach findet sich durch Vergleichung dieser beiden Gleichungen mit den Gleichungen (II)

$$\text{(E)}\quad \left(\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\omega}{\vartheta}\sin 2(\omega t+\eta) - \frac{\omega}{\vartheta}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\frac{d\eta}{dt}\cos 2(\omega t+\eta) = \frac{\frac{dh'}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\frac{d\Gamma'}{dt}}{2\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt}}$$

$$\text{(F)}\quad \left(\varepsilon\frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon'\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\omega}{\vartheta^4}(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta) + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^4}\frac{d\eta}{dt}\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2\right)\sin 2(\omega t+\eta) = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{d\Gamma'}{dt}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\text{(G)}\quad \frac{\vartheta\frac{dh'}{dt} - \vartheta\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\Gamma'}{dt}}{2\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt}} = G\ ^{1})$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = H\ ^{1})$$

so findet sich durch Auflösung der Gleichungen (C), (D), (E), (F) nach $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\varepsilon'}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ [2])

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{G\varepsilon}{2\omega\vartheta^2}\sin 2(\omega t+\eta) + \frac{H\varepsilon'}{\omega\vartheta^2}\sin^2(\omega t+\eta)\\
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{G\varepsilon'}{2\omega\vartheta^2}\sin 2(\omega t+\eta) + \frac{H\varepsilon}{\omega\vartheta^2}\cos^2(\omega t+\eta)\\
\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{G(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta))}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} + \frac{H\varepsilon\varepsilon'\sin 2(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{G\varepsilon\varepsilon'\cos 2(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} - \frac{H(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)}{2\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\sin 2(\omega t+\eta)
\end{aligned} \qquad (38)$$

---

1) Bei Hansen pag. 51 a. a. O. resp. D und E.

2) a. a. O. pag. 46.

Man erkennt sofort, dass im Falle $\varepsilon = \varepsilon'$ die Formeln für $\frac{d\eta}{td}$ und $\frac{d\alpha}{dt}$ unendlich grosse Werte ergeben, und im Falle, wo $s - \varepsilon'$ einen im Verhältniss zu ε und ε' sehr kleinen Wert hat, $\frac{d\eta}{dt}$, und $\frac{d\alpha}{dt}$ sehr gross werden. Hansen hat daher für diese Fälle andere Variablen für ε, ε', η, α eingeführt, und für dieselben analoge Differentialgleichungen gegeben. Ich will indessen künftighin jenen Fall, wo die Formeln ungültig werden, von der Betrachtung ausschliessen. In die Formeln (38), in denen rechter Hand ε, ε', η und α als constant angesehen werden, sind jetzt successive die Glieder von $\frac{dh''}{dt}$ und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ aus (27) und (28) pag. 43. f. einzusetzen.

13.

Die beträchtlichsten Terme von h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ sind

$$h'' = \frac{\vartheta^4}{3}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{2gm_2c_2}{E}\frac{\vartheta^4}{24}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vartheta^4}{3}\frac{d\psi}{dt}\right)$$

Nun war

$$\frac{gm_2c_2}{E} = \omega^2, \quad \vartheta^2\frac{d\psi}{dt} = \omega\varepsilon\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\vartheta^2$$

wo der zweite Teil gegen den ersten übergangen werden kann. Also wird

$$h'' = \frac{1}{3}\omega^2\varepsilon^2\varepsilon'^2 + \frac{\omega^2}{12}\vartheta^4$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}(\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta^2) = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{dh''}{dt} = \frac{\omega^2}{3}\vartheta^3\frac{d\vartheta}{dt}$$

Von diesen Gliedern kommt bei Hansen nur das letzte vor, dass bei ihm der Term

$$\frac{dI''}{dt} = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

fehlt, erklärt sich daher, dass er in erster Näherung den unsrigen ganz analoge Differentialgleichungen integrirt, speciell eine der Gleichung (26) analoge, die in unserer Bezeichnung lautet:

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}$$ [1])

in zweiter Näherung setzt er nun

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{k'}{\sin^2\vartheta}$$ [2])

wo Hansen's k' unsere Grösse Γ' bedeutet, das ändert aber die Bedeutung der Grösse $k' - \Gamma'$, die er immer

$$= \omega\varepsilon\varepsilon'$$

setzt. Hieraus ergeben sich im allgemeinen unwesentliche Abweichungen meiner von Hansen's Resultaten; nur wird das Hansen'sche der Zeit proportionale Glied in der Veränderung von α bei mir um seinen achtfachen Betrag vermehrt erscheinen.

Vermöge der Glieder

$$\frac{dk''}{dt} = \frac{\omega^2}{3}\vartheta^3\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d\Gamma'}{dt} = 0$$

findet Hansen [3]) ausser sehr geringen periodischen Variationen der Grössen ε, ε', η, α noch der Zeit proportionale Aenderungen von η und α, nämlich

$$\begin{aligned} \delta\eta &= -\tfrac{1}{16}\omega(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)t \\ \delta\alpha &= \tfrac{1}{24}\omega\varepsilon\varepsilon' t \end{aligned} \tag{39}$$

Nun ist jetzt zu setzen:

$$\begin{aligned} \vartheta^2 &= \varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta+\delta\eta)+\varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta+\delta\eta) \\ &= \varepsilon^2\cos^2\left[\omega\left(1-\tfrac{1}{16}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\right)t+\eta\right]+\varepsilon'^2\sin^2\left[\omega\left(1-\tfrac{1}{16}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\right)t+\eta\right. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich für die Schwingungsdauer im definirten Sinne der Wert

$$T = \frac{\pi}{\omega\left(1-\frac{1}{16}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\right)} = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\tfrac{1}{16}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\right)$$

Bevor ich die Wirkung des obigen Wertes für $\delta\alpha$ betrachte, will ich mein Glied

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

1) a. a. O. pag. 36.

2) Mit einer unwesentlichen Aenderung a. a. O. pag. 44.

3) a. a. O. pag. 49.

in die Differentialgleichungen einführen, will aber zuvor allgemein untersuchen, was aus den Differentialgleichungen (38) wird, wenn in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ ein Glied vorkommt, das in $\frac{dH''}{dt}$ kein entsprechendes hat. In diesem Falle hat man

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt}, \quad G = -\frac{\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dt}} \frac{d\psi}{dt} \frac{d\Gamma'}{dt} = -\frac{\vartheta^2 \frac{d\psi}{dt}}{\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}} H$$

$$G = +\frac{\omega\varepsilon\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)} \tag{40}$$

wo, wie im Folgenden immer

$$\vartheta^2 \frac{d\psi}{dt} = \omega\varepsilon\varepsilon'$$

gesetzt, und die Gleichung (A) (pag. 59.)

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

benutzt ist. Setze ich den Ausdruck (40) in die Differentialgleichungen (38) ein, so erhalte ich mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\vartheta^2 = \varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) + \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta) \tag{31}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = +\frac{\varepsilon H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}$$

(41)

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\varepsilon\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2} \frac{\cos^2(\omega t+\eta) - \sin^2(\omega t+\eta)}{\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2} \frac{\varepsilon'^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon^2\sin^2(\omega t+\eta)}{\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$

Führt man in diese Differentialgleichungen

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2}{3}\omega^2\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

ein, so ergeben dieselben

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'^2\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{2}{3}\omega\varepsilon^2\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{2}{3}\omega\frac{\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\cos 2(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}(\varepsilon'^2\cos^2(\omega t+\eta)-\varepsilon^2\sin^2(\omega t+\eta))$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{2} - \frac{2}{3}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{2}\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\cos 2(\omega t+\eta)$$

Diese Differentialgleichungen sind zu integriren, und die auf diese Weise erlangten Variationen der Constanten derart zu bestimmen dass sie zu einer bestimmten Zeit, etwa $t_0 = 0$ (pag. 47 f.) null werden. Zu dieser Zeit ist aber $\eta = 0$. Also erhält man

$$\delta\varepsilon = \tfrac{1}{3}\varepsilon\varepsilon'^2\sin^2\omega t$$

$$\delta\varepsilon' = -\tfrac{1}{3}\varepsilon^2\varepsilon'\sin^2\omega t$$

$$\delta\eta = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin 2\omega t$$

$$\delta\alpha = \tfrac{1}{3}\omega\varepsilon\varepsilon' t - \tfrac{1}{6}\varepsilon\varepsilon'\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}\sin 2\omega t$$

Von diesen Gliedern ist das einzige merkliche

$$\delta\alpha = \tfrac{1}{3}\omega\varepsilon\varepsilon' t,$$

es ist gerade achtmal so gross als das von Hansen erhaltene. Fassen wir beide Glieder zusammen, so erhalten wir

$$\delta\alpha = \tfrac{3}{8}\omega\varepsilon\varepsilon' t\ ^{1}).$$

Die sogenannte Schwingungsebene erfährt also ausser der durch die Erdrotation bewirkten Drehung noch eine von dieser unabhängige.

1) Da dieser Wert von der Erdrotation unabhängig ist, so muss ein entsprechendes Glied in der Theorie des gewöhnlichen sphärischen Pendels vorkommen. Für dieses ist $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ zu setzen, und man erhält als Anfang einer Reihenentwickelung mit Hülfe von elliptischen Functionen (nach Vorlesungen von Herrn Prof. Bruns, vgl. auch Schellbach, Ellipt. Int. und Thetafunctionen § 193)

$$\delta\alpha = \frac{2\varepsilon'+\varepsilon'^2}{8}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Auf pag. 48. wurde erwähnt, dass, selbst wenn das Pendel keine anfängliche Seitengeschwindigkeit erhält, ε' einen von Null verschiedenen Wert hat, es wird nämlich

$$\varepsilon' = -\frac{\mathfrak{f}}{\omega}\varepsilon$$

und hiermit

$$\delta\alpha = -\tfrac{3}{8}\mathfrak{f}\varepsilon^2 t$$

Im Falle, wo der Seitenstoss null ist, wird also die Geschwindigkeit, mit der die Schwingungsebene sich dreht, vermindert. Ihr Wert wird

$$\mathfrak{f}(1-\tfrac{3}{8}\varepsilon^2),$$

und man findet, dass das Zusatzglied nur in dem Falle kleiner als ein Tausendtel des Hauptgliedes ist, wenn

$$\varepsilon < \frac{1}{19{,}36}$$

oder in Winkelmass

$$\varepsilon < 2^0\,57',5$$

ist, welcher Wert bei den Versuchen indessen überschritten werden dürfte. Wird ε' grösser, so wächst damit die Wirkung unseres Störungsgliedes, und es wird, um die Bewegung der Schwingungsebene von allem anderen als der Erdrotation unabhängig zu erhalten, darauf ankommen, ε' gering zu machen.

14.

Vernachlässigt man in den folgenden in h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ vorkommenden Gliedern zunächst $\frac{C'}{E}\nu'$ gegen $\frac{C}{E}\nu$ so werden dieselben

$$h'' = -\frac{C}{E}\vartheta^2\cos^2\psi\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2$$

$$H - \frac{d\Gamma''}{dt} = \frac{\nu}{E}\Big[\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)$$

$$+\vartheta^2\cos^2\psi\frac{d}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)\Big]$$

oder einfacher

$$h'' = -\frac{C}{E}\nu^2$$

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{C}{E}\left(r\,\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta^2\cos^2\psi\,\frac{dr}{dt}\right),$$

Man kann um diese Glieder zugleich zu behandeln $H = \frac{d\Gamma'}{dt}$ in die Gleichungen (41) pag. 64. einsetzen und dazu rechter Hand die dem Gliede

$$h'' = -\frac{C}{E}r^2$$

entsprechenden fügen; aus diesem Gliede folgt

$$G = \frac{\vartheta^2\,\frac{dh''}{dt}}{2\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}} = +\frac{C}{E}\,\frac{\vartheta^2 r\,\frac{dr}{dt}}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$

und die vollständigen Differentialgleichungen werden somit

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} - \frac{C}{E}\,\frac{\varepsilon r\,\frac{dr}{dt}}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{\varepsilon H}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} + \frac{C}{E}\,\frac{\varepsilon' r\,\frac{dr}{dt}}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}H\operatorname{cotg}2(\omega t+\eta)$$
$$-\frac{C(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta)-\varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta))\,\frac{d(r^2)}{dt}}{2E\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H(\varepsilon'^2\cos^2(\omega t+\eta)-\varepsilon^2\sin^2(\omega t+\eta))}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$
$$+\frac{C\varepsilon\varepsilon'\operatorname{cotg}2(\omega t+\eta)}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\,\frac{d(r^2)}{dt}$$

Den Zuwachs, den die Grössen ε, ε', η, α durch die betrachteten Glieder erhalten, die übrigens — wie man sich, nach ihrem Ursprunge suchend, leicht überzeugt — den Einfluss der cardanischen Aufhängung oder des Zwanges des Systems enthalten, findet man demnach durch Integration, wie folgt:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\int H dt - \frac{C}{2E}\,\frac{\varepsilon r^2}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\int H dt + \frac{C}{2E}\,\frac{\varepsilon' r^2}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\delta\eta = -\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int H\cot g\,2(\omega t+\eta)\,dt$$

$$-\frac{C}{2E\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int d(r^2)\,\frac{\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta)-\varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta)}{\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int H(\varepsilon^2\cot g(\omega t+\eta)-\varepsilon'^2\tan g(\omega t+\eta))$$

$$+\frac{C\varepsilon\varepsilon'}{E\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int d(r^2)\cot g\,2(\omega t+\eta),$$

wo
$$H = \frac{C}{E}\left(r\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}+\vartheta^2\cos^2\psi\,\frac{dr}{dt}\right)$$

ist, und überall rechter Hand Constanten derart hinzuzufügen sind, dass für $t = t_0 = 0$, also $\eta = 0$

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon' = \delta\eta = \delta\alpha = 0$$

werde.

Es ist nun nach pag. 53.

$$\vartheta\cos\psi = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos(M-\mathfrak{N}) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{N})$$
$$\vartheta\sin\psi = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{N}) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos(M-\mathfrak{N}),$$

und setzt man bei der Differentiation M constant voraus, was in den Endformeln einer Vernachlässigung von Grössen fünfter Ordnung gegenüber solchen vierter Ordnung entsprechen würde, so erhält man

$$-\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi) = \omega(\varepsilon\sin(M-\mathfrak{N})\sin(\omega t+\eta) - \varepsilon'\cos(M-\mathfrak{N})\cos(\omega t+\eta))$$

$$r = -\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi) =$$

$$\frac{\omega}{4}\{(\varepsilon-\varepsilon')^2\cos^2(M-\mathfrak{N}-\omega t-\eta) - (\varepsilon+\varepsilon')^2\cos^2(M-\mathfrak{N}+\omega t+\eta)\}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega^2}{2}\{(\varepsilon-\varepsilon')^2\cos(M-\mathfrak{N}-\omega t-\eta)\sin(M-\mathfrak{N}-\omega t-\eta)$$
$$+(\varepsilon+\varepsilon')^2\cos(M-\mathfrak{N}+\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{N}+\omega t+\eta)\}$$

$$\vartheta^2\cos 2\psi\frac{dr}{dt} = \frac{\omega^2}{8}\{(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\cos 2(M-\mathfrak{N})[(\varepsilon-\varepsilon')^2\sin 2(M-\mathfrak{N}-\omega t-\eta)$$
$$+(\varepsilon+\varepsilon')^2\sin 2(M-\mathfrak{N}+\omega t+\eta)]$$

$$+\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)(\varepsilon-\varepsilon')^2}{2}[\cos 2(M-\mathfrak{N})\sin 2(M-\mathfrak{N})$$
$$-\cos 2(M-\mathfrak{N})\sin(4\omega t+4\eta-2M+2\mathfrak{N})]$$
$$+\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)(\varepsilon+\varepsilon)^2}{2}[\cos 2(M-\mathfrak{N})\sin 2(M-\mathfrak{N})$$
$$+\cos 2(M-\mathfrak{N})\sin(4\omega t+4\eta+2M-2\mathfrak{N})]$$
$$-\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon-\varepsilon')^2[\sin 2(M-\mathfrak{N})\cos(4\omega t+4\eta-2M+2\mathfrak{N})-\sin 2(M-\mathfrak{N})\cos 2(M+\eta)]$$
$$-\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon+\varepsilon')^2[\sin 2(M-\mathfrak{N})\cos 2(M-\mathfrak{N})-\sin 2(M-\mathfrak{N})\cos(2M-2\mathfrak{N}$$
$$+4\omega t+4\eta)]\}$$

Bei der Ausführung der Integration kann man M in allen — die trigonometrischen Functionen von $(\omega t+\eta)$ enthaltenden Gliedern — als constant ansehen. Dann wird

$$\int \vartheta^2\cos 2\eta\,dt = \frac{\omega}{16}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\cos 2(M-\mathfrak{N})[(\varepsilon-\varepsilon')2\cos 2(M-\mathfrak{N}-\omega t-\eta)$$
$$-(\varepsilon+\varepsilon')^2\cos 2(M-\mathfrak{N}+\omega t+\eta)]$$
$$+\frac{\omega}{64}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\cos 2(M-\mathfrak{N})[(\varepsilon-\varepsilon')^2\cos(4\omega t+4\eta-2M+2\mathfrak{N})$$
$$-(\varepsilon+\varepsilon')^2\cos(4\omega t+4\eta+2M-2\mathfrak{N})]$$
$$-\frac{\omega}{64}\varepsilon\varepsilon'\sin 2(M-\mathfrak{N})[(\varepsilon-\varepsilon')^2\sin(4(\omega t+\eta)-2(M-\mathfrak{N}))$$
$$-(\varepsilon+\varepsilon')^2\sin(4(\omega t+\eta)+2(M-\mathfrak{N}))]$$
$$+\frac{\omega^2}{16}\int(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2\sin 4(M-\mathfrak{N})\,dt$$

Die Glieder dieses Ausdrucks bringen bis auf das letzte — speciell wegen des hinzutretenden kleinen Factors $\frac{C}{2E}$ nur sehr kleine periodische Aenderungen in ε und ε' hervor, ebenso wie die in $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$ (pag. 68.) vorkommenden mit der kleinen periodischen Function ϑ^2 proportionalen Ausdrücke sehr gering sind. Daher wird es genügen, mit alleiniger Berücksichtigung des letzten Gliedes

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{C}{2E}\frac{\varepsilon'\omega}{16}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin 4(M-\mathfrak{N})$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{C}{2E}\frac{\varepsilon\omega}{16}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin 4(M-\mathfrak{N})$$

zu setzen und diese Gleichungen unter der Voraussetzung der Variabilität von

$$M = \psi_0+\mathfrak{f}t$$

zu integriren. Sollen die Veränderungen von ε und ε' im Anfange der Zeit, wo $M = \psi_0$ ist, null werden, so erhält man

$$\delta\varepsilon = \frac{C}{32E}\varepsilon'(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\,\frac{\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 4(M-\mathfrak{A})-\cos 4\psi_0)$$

(42)

$$\delta\varepsilon' = -\frac{C}{32E}\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\,\frac{\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 4(M-\mathfrak{A}) - \cos 4\psi_0)$$

— Formeln, die in der Nähe des Aequators unbrauchbar werden, weil im Nenner

$$\mathfrak{f} = n\sin\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)$$

vorkommt. Hansen [1]) hat für diesen Fall bei ähnlichen Gliedern Reihenentwickelungen nach Potenzen der Zeit vorgenommen. Dieselben werden hier ergeben:

$$\delta\varepsilon = -\frac{C}{32E}\varepsilon'(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\,\omega(t\sin 4\psi_0 + 2\mathfrak{f}t^2\cos 4\psi_0)$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{C}{32E}\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\omega(t\sin 4\psi_0 + 2\mathfrak{f}t^2\cos 4\psi_0)$$

wo wegen der Kleinheit von $\mathfrak{f}$ im genannten Falle das dem Quadrate der Zeit proportionale Glied nicht in Betracht kommt.

Im allgemeinen Falle aber erkennt man, dass speciell die Grösse ε', weil ihre Variation den Factor ε' nicht enthält, wegen des Factors $\mathfrak{f}$ im Nenner beträchtliche Variationen annehmen kann, deren Betrag von $\cos 4\psi_0$, also von dem Winkel abhangen wird, den die ursprüngliche Schwingungsebene gegen die feste Achse der cardanischen Aufhängung bildet. Im Maximum resp. Minimum wird die Klammergrösse in (42) $= 2, \frac{C}{E}$ wollen wir nach früheren Betrachtungen $= 0{,}001$ setzen.

Demnach sind Maximum resp. Minimum von $\delta\varepsilon'$ — bei Vernachlässigung von ε'^2 gegen ε^2

$$\delta\varepsilon'_M = \pm\frac{\omega\varepsilon^3 13714}{64000}\operatorname{cosec}\varphi$$

also z. B. für das Secundenpendel, für das $\omega = \pi$ ist, und unter einer Breite von $42^0\,19'$

1) a. a. O. pag. 57.

$$\delta\varepsilon'_M = \pm\,\varepsilon^3$$

und z. B. für

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}\ ^1)$$

$$\delta\varepsilon' = \pm\,\frac{1}{729}$$

ein Wert, der die Bewegung der Schwingungsebene schon in merklicher Weise zu beeinflussen im Stande ist. Aber ε' behält nicht seinen Wert, es ändert sich periodisch in folgender Weise:

Anfänglich vollführe das Pendel sogenannte ebene Schwingungen unter zweckmässigst möglichem Azimuthe, d. h. es sei

$$\cos 4\psi_0 = 0$$

oder das Pendel schwinge anfänglich unter $22^0{,}5$ oder $67^0{,}5$ oder $112{,}5$ oder $157{,}5$ gegen die feste Achse, so wird dadurch das oben berechnete Maximum resp. Minimum der Variation von ε' auf die Hälfte herabgedrückt. Diese ebenen Schwingungen gehen nun allmählich in elliptische über, deren kleine Achse nach

$$\frac{3}{2\sin\varphi}\ \text{Sternstunden}$$

ihr Maximum erreicht, dann gehen die Schwingungen allmählich wieder in ebene über und zwar in derselben Zeit, hierauf beginnt das Pendel elliptische Schwingungen in der entgegengesetzten Richtung auszuführen, deren kleine Achse nach genau derselben Zeit einen Maximalwert haben wird. Hierauf gehen die Schwingungen in derselben Zeit wieder in ebene über, und so geht es fort. Die Drehung der Schwingungsebene würde durch die betrachteten Glieder während $\frac{3}{\sin\varphi}$ Sternstunden beschleunigt, während der folgenden verzögert werden u. s. f. und zwar immer um denselben Betrag, so dass die Wirkung der betrachteten Glieder sich in je $\frac{6}{\sin\varphi}$ Sternstunden aufhebt.

Ob diese eigentümliche Wirkung des Zwanges unseres Systemes wirklich zu beobachten sein wird, muss dahin gestellt bleiben; es ist leicht möglich, dass höhere Glieder eine paralysirende Gegenwirkung darauf ausüben. Es wird aber immerhin zweckmässig sein, auch wegen dieser Glieder das Verhältniss $\frac{C}{E}$ so weit als möglich herabzudrücken, weshalb auch lange Pendel sich besser zu den Beobachtungen eignen werden, als kurze.

---

1) Ein Wert, den Hansen des öfteren als Beispiel wählt.

15.

Setzt man nach pag. 67. den Wert von

$$H = \frac{C}{2E}\left(\vartheta^2\cos^2\psi\frac{dr}{dt} + r\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right),$$

so ergibt sich bei Einführung der Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l}\varrho\cos\sigma = \varepsilon\\ \varrho\sin\sigma = \varepsilon'\end{array}\right\} \quad M' = M - \mathfrak{N}$$

$$H = \frac{C}{E}\omega^2\varrho^4\left\{\frac{\sin 4M'}{64}2\cos^2 2\sigma + \frac{\cos 2(\omega t+\eta)}{8}\left(\sin 2M' + \sin 4M'\frac{\cos 2\sigma}{2}\right)\right.$$
$$+ \frac{\sin 2(\omega t+\eta)}{8}(\sin 2\sigma\cos^2 2M' + \sin 4\sigma\cos^2 M'\cos 2M')$$
$$+ \frac{\cos 4(\omega t+\eta)}{64}(\sin 4M'(3-\cos 4\sigma) + 8\sin 2M'\cos 2\sigma)$$
$$\left. + \frac{\sin 4(\omega t+\eta)}{16}((\cos 2M' - \sin^2 M')\sin 2\sigma + \cos^2 M'\sin 4\sigma)\right\}$$

Ferner kann man noch bilden:

$$r^2 = \omega^2\frac{\varrho^4}{16}\left\{\frac{1-\cos 4M'}{2}\sin^2 2(\omega t+\eta)\right.$$
$$-2\sin 2\sigma\sin 2M'\sin 2(\omega t+\eta)(1+\cos 2M'\cos 2(\omega t+\eta))$$
$$+\sin^2 2\sigma(1+\cos 2M'\cos 2(\omega t+\eta))$$
$$\left.+\cos^2 2M'\frac{1+\cos 4(\omega t+\eta)}{2}\right\}$$

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{\omega^3\varrho^4}{16}\{\sin^2 2M'\sin 4(\omega t+\eta) - 4\sin 2\sigma\sin 2M'\cos 2(\omega t+\eta)$$
$$-2\sin 2\sigma\sin 4M'\cos(\omega t+\eta)$$
$$-2\sin^2 2\sigma(\cos 2M'\sin 2(\omega t+\eta) + \cos^2 2M'\sin 4(\omega t+\eta)\}$$

Um nun die Variationen von η und α zu bestimmen, haben wir die eben erlangten Ausdrücke für H und $\frac{d(r^2)}{dt}$ nach einander mit $\operatorname{cotg} 2(\omega t+\eta)$, $\operatorname{cotg}(\omega t+\eta)$, $\operatorname{tang}(\omega t+\eta)$ zu multipliciren und dann zu integriren.

Nach pag. 68. ergibt sich somit der folgende Ausdruck für $\delta\eta$, wo in den trigonometrischen Functionen ωt für $\omega t+\eta$ geschrieben, und rechter Hand noch die passende Constante hinzuzudenken ist:

$$\delta\eta = -\frac{C\varrho^2}{E\cos^2 2\sigma}\Big\{\frac{1}{32}\sin^2 2M'(\cos 2\sigma\sin 2\omega t + t\omega + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2\sigma\sin 2M'(ln\,\mathrm{tang}\omega t + 4\cos^2\omega t)$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2\sigma\cos 2\sigma\sin 2M' ln\sin 2\omega t$$

$$-\frac{1}{32}\sin 2\sigma\cos 2\sigma\sin 4M'(ln\,\mathrm{tang}\omega t + 4\cos^2\omega t + \cos 2\omega t)$$

$$-\frac{1}{32}\sin 2\sigma\sin 4M'(\tfrac{1}{2}ln\mathrm{tang}2\omega t + 2\cos^2 2\omega t + \tfrac{1}{2}ln\sin 4\omega t)$$

$$-\frac{\omega t}{16}\sin^2 2\sigma\cos 2\sigma\cos 2M'$$

$$-\frac{1}{32}\sin^2 2\sigma\cos 2M'\sin 2\omega t$$

$$-\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma\cos 2\sigma\cos^2 2M'\sin 2\omega t$$

$$-\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma\cos^2 2M'(\omega t + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)$$

$$+\frac{1}{64}\sin 2\sigma\cos^2 2\sigma\sin 4M' ln\sin 2\omega t$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2\sigma(\sin 2M' + \tfrac{1}{2}\sin 4M'\cos 2\sigma)(ln\,\mathrm{tang}\omega t + 4\cos^2\omega t)$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2\sigma\sin 2\omega t(\cos^2 2M'\sin 2\sigma + \sin 4\sigma\cos^2 M'\cos 2M')$$

$$+\frac{1}{256}\sin 2\sigma[\sin 4M'(3-\cos 4\sigma) + 8\sin 2M\cos 2\sigma]$$

$$\times[ln\,\mathrm{tang}2\omega t + 4\cos^2 2\omega t + ln\sin 4\omega t]$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2\sigma(t\omega + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)[\sin 2\sigma(\cos 2M' - \sin^2 M')$$

$$+\cos^2 M'\sin 4\sigma]\Big\}$$

Durch den Strich ist angedeutet worden, wo die vom ersten Teile von $\delta\eta$ (pag. 68.) herrührenden Glieder aufhören. Ordnet man die Glieder von $\delta\eta$ so, dass man die der Zeit proportionalen Terme voranstellt, dann die periodischen folgen lässt, so erhält man den folgenden Ausdruck, bei dem in den trigonometrischen Functionen jetzt $\eta = 0$ gemacht ist, was der Bedingung $t_0 = 0$ entspricht, und Constanten hinzugefügt sind, die bewirken, dass zur Zeit $t = 0$ alles bis auf die logarithmischen Glieder null wird:

$$\delta\eta = -\frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\omega t\Big[\frac{1}{32}\sin^2 2M' - \tfrac{1}{16}\sin^2 2\sigma\cos 2\sigma\cos 2M'$$

$$-\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma\cos^2 2M' + \tfrac{1}{16}\sin 2\sigma\sin 4\sigma\cos^2 M'$$

$$+\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma(\cos 2M' - \sin^2 M')\Big]$$

$$+\frac{1}{32}\sin 2\omega t[\cos 2\sigma\sin^2 2M' - \sin^2 2\sigma(\cos 2M' - 2\cos^2 2M')$$

$$-2\sin^2 2\sigma\cos 2\sigma(\cos^2 2M' - 2\cos 2M'\cos M')]$$

$$+\frac{1}{128}\sin 4\omega t[\sin^2 2M' - 2\sin^2 2\sigma(\cos^2 2M' - \cos 2M' + \sin^2 M')$$

$$+2\sin 2\sigma\sin 4\sigma\cos^2 M']$$

$$-\frac{1}{32}(\cos 2\omega t - 1)[\sin 2\sigma\cos 2\sigma\sin 4M' + 2\sin 2\sigma(\cos 2\omega t + 1)$$

$$\times \sin 4M'(1 - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 4\sigma)$$

$$-4\sin 2\sigma\cos 2\sigma(\cos 2\omega t + 1)\sin 2M']$$

$$-\frac{1}{16}ln\sin 2\omega t(\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma - \tfrac{1}{4}\sin 4M'\sin 2\sigma\cos^2 2\sigma)$$

$$-\frac{1}{64}(ln\tan g 2\omega t + ln\sin 4\omega t)[\sin 2\sigma\sin 4M'$$

$$-2\sin 2\sigma\cos 2\sigma\sin 2M' - \tfrac{1}{4}\sin 2\sigma(3 - \cos 4\sigma)\sin 4M']\Big\}$$

Die logarithmischen Glieder lassen sich auf folgende Weise zusammenfassen:

$$-\frac{1}{16}ln\sin 2\omega t\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2M'\cos 2\sigma)$$

$$+\frac{1}{32}(ln\tan g 2\omega t + ln\sin 4\omega t)\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2M'\cos 2\sigma)$$

$$= \frac{1}{32}ln 2[\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\sigma\cos 2M')]$$

Diese Grösse war nun in Beziehung auf die Integration constant, wir haben also als passende Integrationsconstante rechter Hand dieselbe Grösse mit dem negativen Zeichen hinzuzufügen, womit bewiesen ist, dass diejenigen Glieder in obigem Ausdrucke, welche Unstetigkeiten in der Bewegung hervorrufen würden, fortfallen.

Die periodischen Glieder in $\delta\eta$ sind, wenn wir $\cos^2 2\sigma$ als nahe bei 1 liegend voraussetzen, völlig unmerklich; die der Zeit proportionalen Glieder bewirken dagegen eine Vergrösserung der Schwingungszeit, deren Wert mit Berücksichtigung von pag. 48 jetzt wird:

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left\{1+\frac{\varrho^2}{16}\left[1+\frac{C}{2E\cos^2 2\sigma}\left(\sin^2 2M'+2\sin^2 2\sigma(\cos 2\sigma\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sin^2 M'[1-4\sin^2 M'])\right)\right]\right\}$$

Den Fall $\varepsilon = \varepsilon'$, wo diese Formel unbrauchbar wird, haben wir von vornherein von der Betrachtung ausgeschlossen. Ist ε' so klein, dass wir sein Quadrat gegen dasjenige von ε vernachlässigen dürfen, so erkennt man, dass für $\frac{C}{E} = 0{,}001$ das neu erhaltene Glied im Maximo nur ein Zweitausendtel des Hauptstörungsgliedes ausmachen kann, die Schwingungsdauer also für den kaum in der Praxis vorkommenden Wert $\varepsilon = \frac{1}{8}$ um höchstens

$$\frac{1}{11520000}$$

ihres Betrages vermehrt wird. Aber $\sin^2 2M'$ ist nicht immer genau gleich Eins. In je

$$3\operatorname{cosec}\varphi \text{ Sternstunden}$$

wächst $\sin^2 2M'$ von 0 bis 1, fällt dann von 1 bis 0 u. s. f. Nach einem Satze der Integralrechnung haben wir in einem solchen Zeitraume $\sin^2 2M'$ im Mittel $= \frac{1}{2}$ zu setzen und finden so, dass z. B. das Secundenpendel täglich im Durchschnitt $\frac{3}{10}$ Schwingungen weniger macht, als es ohne den Zwang der cardanischen Aufhängung machen würde, dass es also im Mittel täglich um $\frac{3}{80}$ Schwingungen zurückbleibt. Das zwei Secunden schwingende Pendel würde in cardanischer Aufhängung schwingend für $\varepsilon = \frac{1}{8}$ durchschnittlich pro Tag $1\frac{3}{10}$ Schwingungen weniger machen.

Setzt man $\varepsilon = \frac{1}{9}$, so sind die entsprechenden Zahlen $\frac{1}{60}$ resp. $1\frac{1}{20}$. Merklich dürfte diese Wirkung der Aufhängungsart also nicht sein.

16.

Nach pag. 68. ist

$$\delta\alpha = \frac{1}{\omega\varrho^4\cos^2 2\sigma}\int \frac{\varrho^2\sin^2\sigma\cos^2(\omega t+\eta) - \varrho^2\cos^2\sigma\sin^2(\omega t+\eta)}{\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)} H dt$$
$$+ \frac{C\sin\sigma\cos\sigma}{E\omega^2\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int \operatorname{cotg} 2\omega t d(r^2)$$
$$= \frac{\sin^2\sigma}{\omega\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int H\operatorname{cotg}\omega t dt - \frac{\cos^2\sigma}{\omega\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int H\operatorname{tang}\omega t dt$$
$$+ \frac{C\sin 2\sigma}{2E\omega^2\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int \operatorname{cotg} 2\omega t d(r^2),$$

wo in den trigonometrischen Functionen wie im Folgenden ωt für $\omega t + \eta$ geschrieben ist. Es wird

$$\delta\alpha = \frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\sin^2\sigma\Big[\frac{1}{32}\cos^2 2\sigma\sin 4M' ln\sin\omega t$$
$$+\frac{1}{16}(\sin 2M' + \tfrac{1}{2}\cos 2\sigma\sin 4M')(ln\operatorname{tang}\omega t + 4\cos^2\omega t + ln\sin 2\omega t)$$
$$+\frac{1}{8}(t\omega + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t)(\sin 2\sigma\cos^2 2M' + \sin 4\sigma\cos^2 M\cos 2M')$$
$$+\frac{1}{128}(ln\operatorname{tg}\omega t + 4\cos^2\omega t + \cos 2\omega t + \tfrac{1}{2}ln\operatorname{tg} 2\omega t + 2\cos^2 2\omega t$$
$$+\tfrac{1}{2}ln\sin 4\omega t)(\sin 4M'[3-\cos 4\sigma] + 8\sin 2M'\cos 2\sigma)$$
$$+\frac{1}{16}(\sin 2\omega t + t\omega + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)(\sin 2\sigma[\cos 2M' - \sin^2 M'] + \cos^2 M'\sin 4\sigma)\Big]$$
$$-\cos^2\sigma\Big[-\frac{1}{32}\cos^2 2\sigma\sin 4M' ln\cos\omega t$$
$$+\frac{1}{16}(-ln\operatorname{tg}\omega t - 4\cos^2\omega t + ln\sin 2\omega t)(\sin 2M' + \tfrac{1}{2}\sin 4M'\cos 2\sigma)$$
$$+\frac{1}{8}(t\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t)(\sin 2\sigma\cos^2 2M' + \sin 4\sigma\cos^2 M'\cos 2M')$$
$$+\frac{1}{128}(ln\operatorname{tg}\omega t + 4\cos^2\omega t + \cos 2\omega t - \tfrac{1}{2}ln\operatorname{tg} 2\omega t - 2\cos^2 2\omega t$$
$$-\tfrac{1}{2}ln\sin 4\omega t)(\sin 2\sigma[\cos 2M' - \sin^2 M'] + \cos^2 M'\sin 4\sigma)\Big]$$
$$+\frac{\sin 2\sigma}{32}\Big[\sin^2 2M'(t\omega + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t) - 2\sin 2\sigma\sin 2M'(ln\operatorname{tg}\omega t + 4\cos^2\omega t)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin 2\sigma\sin 4M'(ln\operatorname{tg} 2\omega t + 4\cos^2 2\omega t + ln\sin 4\omega t)$$
$$-\sin^2 2\sigma\cos 2M'\sin 2\omega t - 2\sin^2 2\sigma\cos^2 2M'\Big(t\omega + \frac{\sin 4\omega t}{4}\Big)\Big]\Big\}$$

Hier sind noch rechter Hand Constanten derart hinzuzufügen, dass $\delta\alpha$ zu einer bestimmten Zeit t_0 null werde. Ordnet man die Glieder von $\delta\alpha$ analog denen von $\delta\eta$, so erkennt man leicht, dass die logarithmischen Glieder sich wieder gegen einander aufheben, so dass nur bleibt:

$$\delta\alpha = \frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\frac{\omega t}{32}\Big[\sin 2\sigma(4\cos 2M' - \tfrac{3}{2}\cos^2 2M')$$
$$+2\sin 4\sigma\cos M'\sin 3M' - \tfrac{1}{2}\sin 6\sigma(2\cos 2M' + \cos^2 2M')\Big]$$
$$-\frac{1}{64}(\sin 2M'\sin\sigma\sin 3\sigma + (3\sin 4\sigma + 14\cos^2\sigma\sin^2\sigma - \cos^4\sigma)\sin 4M')$$
$$-\frac{1}{128}\cos 2\omega t(\sin 4M'(9 - 4\cos 2\sigma - 3\cos 4\sigma) + 8\sin 2M'(3\cos 2\sigma - \cos 4\sigma))$$

$$+\frac{1}{128}\sin 2\omega t(\sin 2\sigma(2-5\cos 2M'+4\cos 4M')$$
$$+\sin 4\sigma(2\cos 4M'-2\cos 2M'+4)-\sin 6\sigma(2+4\cos 2M'))$$
$$+\frac{1}{128}\cos 4\omega t(8\cos 2\sigma\sin 2M'+2\cos^2 2\sigma\sin 4M')$$
$$+\frac{1}{128}\sin 4\omega t(3-\tfrac{7}{4}\cos 2M')\sin 4\omega t\Big\}$$

wo rechter Hand noch passende Constanten hinzuzufügen sind. Die periodischen Terme sind völlig unmerklich, der der Zeit proportionale ist

$$\frac{1}{4}\frac{C}{E}\frac{\varrho^2\sin 2\sigma}{\cos^2 2\sigma}\,\omega.Ft=\frac{C}{2E}\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\right)^2\varepsilon\varepsilon'\omega Ft$$

wo — wie leicht zu sehen ist — F einen Factor bedeutet, der stets seinem absoluten Werte nach unterhalb 1 liegt; sieht man wie bisher ε' gegen ε als klein an, so erkennt man, dass für $\frac{C}{E}=0{,}001$ dieses Glied 750 mal kleiner ist als das Hauptstörungsglied

$$\tfrac{3}{8}\,\omega\varepsilon\varepsilon' t$$

Hiermit schliessen wir die Discussion der der Eigentümlichkeit des cardanischen Zwanges entstammenden Glieder.

17.

In $\frac{d\Gamma'}{dt}$ kommen folgende Glieder vor:

$$2n\cos\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\vartheta^2\cos(\psi+\mathfrak{A})\frac{d\vartheta}{dt}-n\cos\varphi\frac{C}{E}\cos\psi\cos\mathfrak{A}\vartheta^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

Das erste von diesen Gliedern tritt bis auf den Factor $\left(1-\frac{C}{2E}\right)$ schon bei Hansen auf. Denn da Hansen die Azimuthe ψ von der Meridianebene zählt, während wir sie von der durch die feste Achse gelegten Verticalebene ab rechnen, so ist unser $(\psi+\mathfrak{A})$ nichts anderes als Hansen's ψ und das Glied

$$2n\cos\varphi\cos\psi\vartheta^2\frac{d\vartheta}{dt}$$ [1]

das bei Hansen in $\frac{dx'}{dt}$ (bei uns $\frac{d\Gamma'}{dt}$) vorkommt, ist abgesehen von genanntem Factor der obige erste Term. Es genügt also auch auf

1) Hansen a. a. O. pag. 51 unten.

das Resultat der Integration bei Hansen[1]) zu verweisen, die nur unmerkliche periodische Glieder liefert, denen bei uns der constante Factor $\left(1-\frac{C}{2E}\right)$ hinzuzufügen wäre. Auch das Glied

$$-n\cos\varphi\cos\mathfrak{A}\frac{C}{E}\vartheta^2\cos\psi\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{dT'}{dt}=H$$

das in die Differentialgleichungen pag. 64 zu substituiren wäre, kann nur bei der Integration unmerkliche periodische Glieder in $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ liefern. Denn nach pag. 68 ist

$$\vartheta\cos\psi=\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos(M-\mathfrak{A})-\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{A})$$

in $\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$ steckt aber der Factor

$$\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

also wird in jenen Differentialgleichungen die rechte Seite eine homogene Function ungeraden positiven Grades von $\sin(\omega t+\eta)$, $\cos(\omega t+\eta)$.

18.

Wir gehen zur Ermittelung des Einflusses über, den der erste — mitschwingende — Körper auf die Bewegung ausübt. Dieser Körper hat beim Gaussischen Pendel die Form eines Ringes, in einer von Dr. K. Onnes in Gröningen 1879 gegebenen Einrichtung[2]) die eines soliden Cylinders, der von beiden Seiten mit je einem keilförmigen bis zur Mitte seiner Höhe reichenden Einschnitte versehen ist, der auf dem anderen senkrecht steht.

Wir gehen von den Gleichungen aus:

$$h''=-\frac{T_1}{E}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2+\frac{2gm_1s_1}{E}(\vartheta\sin\psi\sin\iota_1-\frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi\cos\iota_1)$$

$$\frac{dT'}{dt}=-\frac{T_1}{E}\vartheta\cos\psi\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2}+\frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1-\vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

$$\frac{dh''}{dt}=-\frac{2T_1}{E}\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2}$$

$$+\frac{2gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1-\vartheta\sin\psi\cos\iota_1)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+\frac{2gm_1s_1}{E}\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi(\sin\iota_1-\vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

1) a. a. O. pag. 61.

2) Zeitschrift für Instrumentenkunde Bd. III, pag. 359.

Wenn wir bei der Differentiation und Integration, wie bisher in der zweiten Näherung, f gegen ω vernachlässigen, so ist nach pag. 68

$$\frac{d^2(\vartheta\cos\psi)}{dt^2} = -\omega^2\vartheta\cos\psi; \qquad \frac{d^2\vartheta\sin\psi}{dt^2} = -\omega^2\vartheta\sin\psi$$

und somit wird

$$H = \frac{dT'}{dt} = \frac{T_1}{E}\omega^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi + \frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1 - \vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

$$G = \frac{T_1}{E}\frac{\omega^2\vartheta\sin\psi}{\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} - \vartheta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right)$$

$$+ \frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\sin\psi(\sin\iota_1 - \vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

$$G = \left(\omega^2\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1s_1}{E}\cos\iota_1\right)\vartheta^2\sin^2\psi + \frac{gm_1s_1}{E}\sin\iota_1\vartheta\sin\psi$$

$$H = \left(\omega^2\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1s_1}{E}\cos\iota_1\right)\vartheta^2\sin\psi\cos\psi + \frac{gm_1s_1}{E}\sin\iota_1\vartheta\cos\psi$$

wenn man also zur Abkürzung

$$\omega'^2 = \omega^2\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1s_1}{E}\cos\iota_1; \qquad g_1 = \frac{gm_1s_1}{E}\sin\iota_1$$

$$S = \omega'^2\vartheta^2\sin\psi + g_1\vartheta$$

setzt, so erhält man einfach

$$G = S\sin\psi, \quad H = S\cos\psi$$

und bei Substitution dieser Ausdrücke in die Differentialgleichungen pag. 61

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{S}{\omega\vartheta^2}\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{S}{\omega\vartheta^2}\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{S\varepsilon\cos(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

$$+ \frac{S\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi + \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{S\varepsilon'\cos(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

$$- \frac{S\varepsilon\sin(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi + \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

Weil nun nach pag. 53

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta) = \vartheta\cos(\psi - M+\mathfrak{N}) = \vartheta\cos(\psi - M'),$$
$$\varepsilon'\sin(\omega t+\eta) = \vartheta\sin(\psi - M+\mathfrak{N}) = \vartheta\sin(\psi - M')$$

ist, so ergiebt sich

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi = \vartheta\sin M'$$
$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi = \vartheta\cos M'$$

und demnach

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{S}{\omega\vartheta}\sin(\omega t+\eta)\sin M'$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{S}{\omega\vartheta}\cos(\omega t+\eta)\cos M'$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{S}{\omega\vartheta(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin M' - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos M')$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{S}{\omega\vartheta(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon'\cos(\omega t+\eta)\sin M' - \varepsilon\sin(\omega t+\eta)\cos M')$$

Der Ausdruck von S besteht aus zwei Teilen, deren zweiter $g_1\vartheta$ in diese Gleichungen substituirt die rechten Seiten zu linearen homogenen Functionen von $\sin(\omega t+\eta)$ und $\cos(\omega t+\eta)$ macht, und bei der Integration nur kleine periodische Functionen liefert, so zwar, dass der absolute Wert von $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$ nicht grösser als

$$\frac{g_1}{\omega^2} = \frac{gm_1 s_1\sin\iota_1}{gm_2 c_2} \cdot \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1$$

werden kann; m_1 ist die geringe Masse des ersten Körpers, s_1 der Abstand seines Schwerpunktes von der festen Achse der Aufhängung und wird vom Mechaniker nahe gleich null gemacht werden können; schliesslich war ja ι_1 der Winkel, den das vom Schwerpunkte des ersten Körpers auf die feste Achse gefällte Lot mit der gemeinsamen Senkrechten beider Achsen bildet, ι_1 wird demnach fast gleich null sein, wenn der erste Körper symmetrisch gebaut und homogen ist. Hieraus folgt die Unbeträchtlichkeit von $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$. In $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ bringt die Substitution von $g_1\vartheta$ allerdings Variationen hervor, die — weil ε im Nenner in der zweiten Potenz, im Zähler in der ersten Potenz vorkommt — für ganz kleine Grund von ε unbrauchbar sein werden; das hat seinen inneren Grund darin, dass das betrachtete Glied die Gleichgewichtslage des Systemes verändert, wie später zu zeigen sein wird. Die Substitution

$$S = \omega'^2 \vartheta^2 \sin\psi$$

bringt in den Variationen viel grössere Terme hervor. Denn es war

$$\vartheta \sin\psi = \varepsilon \cos(\omega t + \eta) \sin M' + \varepsilon' \sin(\omega t + \eta) \cos M',$$

und, dies in die Differentialgleichungen der vorigen Seite einsetzend, erhält man:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\omega'^2}{\omega}\left(\frac{\varepsilon'}{4}\sin 2M' - \frac{\varepsilon'}{4}\sin 2M' \cos 2(\omega t+\eta) + \frac{\varepsilon}{2}\sin^2 M' \sin 2(\omega t+\eta)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = +\frac{\omega'^2}{\omega}\left(\frac{\varepsilon}{4}\sin 2M' + \frac{\varepsilon}{4}\sin 2M' \cos 2(\omega t+\eta) + \frac{\varepsilon'}{4}\cos^2 M' \sin 2(\omega t+\eta)\right)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\omega'^2}{4\omega} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\frac{\omega'^2}{4\omega}\cos 2M' - \frac{\omega'^2}{\omega}\frac{\varepsilon'^2\cos^2 M' + \varepsilon^2 \sin^2 M'}{2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} \cos 2(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'}{2\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\cos 2M' - \cos 2(\omega t+\eta)) - \frac{\omega'^2}{4\omega}\sin 2M' \sin 2(\omega t+\eta)$$

Hieraus folgt durch Integration bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω und passende Bestimmung der Constanten der Integration

$$\delta\varepsilon = \frac{\omega'^2}{\omega}\frac{\varepsilon'}{8\mathfrak{f}}(\cos 2M' - \cos 2\psi_0) + \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\sin M'(\varepsilon \sin M'[\cos 2\omega t - 1] + \varepsilon' \cos M' \sin 2\omega t)$$

$$\delta\varepsilon' = -\frac{\omega'^2}{\omega}\frac{\varepsilon}{8\mathfrak{f}}(\cos 2M' - \cos 2\psi_0) + \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\cos M'(\varepsilon \sin M' \sin 2\omega t - \varepsilon' \cos M'[\cos 2\omega t - 1])$$

$$\delta\eta = -\frac{\omega'^2}{4\omega}t + \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\omega'^2}{8(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\mathfrak{f}\omega}(\sin 2M' - \sin 2\psi_0) - \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\frac{\varepsilon'^2\cos^2 M' + \varepsilon^2 \sin^2 M'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin 2\omega t$$

$$\delta\alpha = -\frac{\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'}{4\omega\mathfrak{f}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\sin 2M' - \sin 2\psi_0) + \frac{\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'}{4\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\sin 2\omega t - \frac{\omega'^2}{8\omega^2}\sin 2M'(\cos 2\omega t - 1)$$

wo $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$ für $t = t_1 = 0$ zu null werden. Der einzige hier vorkommende der Zeit proportionale Term bewirkt eine Veränderung der Schwingungsdauer, die durch dieses Glied statt $\frac{\pi}{\omega}$

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left(1 + \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\right) = \frac{\pi}{\omega}\left(1 + \frac{T_1}{4E} - \frac{gm_1 s_1}{4m_2 c_2}\cos\iota_1\right)$$

wird. Die Schwingungsdauer wird vermehrt, wenn

$$\frac{m_1 s_1 \cos\iota_1}{m_2 c_2} < \frac{T_1}{E}$$

ist, vermindert im entgegengesetzten Falle.

Projicirt man demnach den Abstand des Schwerpunktes von der festen Achse auf die gemeinsame Senkrechte beider Achsen, so wird, wenn jene Projection p_1 in der Ruhelage unterhalb der a-c-ebene liegt und so beschaffen ist, dass

$$\frac{m_1 p_1}{m_2 c_2} > \frac{T_1}{E}$$

ist, die Schwingungsdauer vermindert; wenn jene Brüche gleich sind, nicht geändert; im allgemeinen aber vermehrt werden.

Die anderen Glieder in den Variationen, die auf der vorigen Seite stehen, sind teilweise völlig unmerkliche periodische Glieder, teilweise periodische Glieder von beträchtlichem Maximalwerte, welche sogar unbrauchbar werden, wenn $\mathfrak{f}$ sehr klein, der Beobachtungsort also dem Aequator nahe ist.[1]) Die Natur der Variation von ε' bewirkt wieder, (wie die Glieder pag. 69), dass, wenn das Pendel auch ursprünglich sogenannte ebene Schwingungen ausführt, dieselben allmählich in elliptische, dann wieder in ebene übergehen u. s. f., und dass die kleine Achse der Ellipse dann am kleinsten bleibt, wenn $\cos 2\gamma_0 = 0$ ist, d. h. wenn man das Pendel unter 45° oder 135° gegen die feste Achse anstösst. Nur bei dieser günstigst möglichen Anfangslage der sogenannten Schwingungsebene wird im Laufe der Bewegung die Wirkung von ε' auf die Drehung derselben allmählich wieder aufgehoben. Ob diese Wirkung, sowie die directe Wirkung in $\delta\alpha$ — wie sie auf der vorigen Seite erhalten wurde — merklich ist, das hängt von dem Werte von

$$\frac{\omega'^2}{4\omega\mathfrak{f}} = \frac{1}{4\omega\mathfrak{f}}\left(\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1 s_1}{m_2 c_2}\cos\iota_1\right)$$

1) Für diesen Fall würde eine Reihenentwickelung analog der von pag. 70. zum Ziele führen.

ab, den ich leider nicht taxiren konnte, weil mir eine Kenntniss der Dimensionen des Apparates fehlt.

19.

Diejenigen Störungen der Bewegung, welche durch die Existenz eines kleinen Abstandes zwischen den Rotationsachsen bedingt sind, werden durch Berücksichtigung folgender Glieder erhalten:

$$h'' = -\frac{2lm_2c_2}{E}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2 - \frac{gm_2}{E}l\vartheta^2\sin^2\psi$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = -\frac{2lm_2c_2}{E}\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) - \frac{gm_2}{E}l\vartheta^2\sin\psi\cos\psi + \frac{m_2c_2}{E}le\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

Mit vorläufiger Uebergehung des letzten Gliedes in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ bilden wir

$$\frac{dh''}{dt} = -\frac{4lm_2c_2}{E}\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2} - \frac{2gm_2}{E}l\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

und da bei Vernachlässigung von f gegen ω

$$\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2} = -\omega^2\vartheta\sin\psi$$

ist, so erhält man mit Einführung der Bezeichnung

$$\omega''^2 = \frac{2lm_2c_2}{E}\omega^2 - \frac{gm_2l}{E}$$

$$\frac{dh''}{dt} = 2\omega''^2\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \omega''^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi$$

und hieraus

$$G = \frac{\omega''^2\vartheta^2\sin\psi}{\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} - \vartheta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right) = \omega''^2\vartheta^2\sin^2\psi$$

$$H = \omega''^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi$$

Durch Vergleichung dieser Werte mit denen von G und H pag. 80 unten, erkennt man, dass die jetzt gesuchten Variationen der Constanten einfach gefunden werden können, wenn man nur in den pag. 81 gefundenen ω''^2 statt ω'^2 schreibt.

Wir schliessen also unmittelbar, dass der Ausdruck der Schwingungsdauer vermöge der betrachteten Glieder statt $\frac{\pi}{\omega}$ nach pag. 82

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\frac{\omega''^2}{4\omega^2}\right) = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\frac{lm_2c_2}{2E}-\frac{gm_2l}{4E\omega^2}\right)$$

wird. Da nun nahezu $E = m_2c_2^2$ ist, so ist nahe

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\frac{l}{4c_2}\right)$$

Nach dem, was über das Vorzeichen von l festgesetzt wurde, wird also die Schwingungszeit vergrössert, wenn in der Ruhelage des Apparates die bewegliche Achse unterhalb, vermindert, wenn dieselbe oberhalb der festen Achse liegt. Bei der Vollkommenheit der mechanischen Technik wird $\frac{l}{c_2}$ kaum grösser als 0,0001 sein, die Schwingungszeit wird also durch diesen Fehler kaum um mehr als ein Vierzigtausendstel ihres Betrages modificirt werden.

Ausserdem bringt der betrachtete Fehler periodische Variationen der Constanten mit beträchtlichem Maximalwert hervor. Dieser Maximalwert ist z. B. für $\delta\alpha$, wenn $\sin 2\psi_0 = 0$ ist,

$$\delta\alpha_M = \frac{\omega''^2\varepsilon\varepsilon'}{4\omega\mathfrak{f}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} = \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'\operatorname{cosec}\varphi}{4n\left(1-\frac{C}{2E}\right)}\left(\frac{2lm_2c_2}{E}-\frac{gm_2l}{E\omega^2}\right)\varepsilon^2\frac{1}{-\varepsilon'^2}$$

Da nun nahezu

$$1-\frac{C}{2E} = 1$$

und

$$\frac{2lm_2c_2}{E}-\frac{gm_2l}{E\omega^2} = \frac{l}{c^2} = 0{,}0001$$

gesetzt werden kann,

$$\delta\alpha_M = \frac{13714}{40000}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\operatorname{cosec}\varphi$$

so erkennt man, dass dieses periodische Glied mindestens für diejenigen Werte von ε' sehr merklich sein wird, welche das Hauptstörungsglied in der Bewegung der Schwingungsebene:

$$\frac{3}{8}\omega\varepsilon\varepsilon' t$$

zu einer merklichen Wirkung gelangen lassen.

Ueber die Störung von ε' könnte nur dem auf pag. 82 Gesagten ganz Analoges hinzugefügt werden. Jedenfalls ist die höchste Sorgfalt auf ein genaues Sichschneiden der Achsen der cardanischen Aufhängung zu verwenden.

Das letzte Glied in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ ist zwar von der Ordnung oben vernachlässigter Glieder, soll aber berücksichtigt werden, weil es einen der Zeit proportionalen Term liefert. Wir setzen es in die Gleichungen pag. 65 ein, und erhalten mit

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{m_2 c_2 le}{E} \frac{d(\vartheta^2)}{dt} = -\omega \frac{m_2 c_2 le}{2E} (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2) \sin 2(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \frac{m_2 c_2 le}{E} \frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \frac{m_2 c_2 le}{E} \frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = +\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \frac{m_2 c_2 le}{E} \cos 2(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{m_2 c_2 le}{2E} - \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{4(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} \frac{m_2 c_2 le}{E} \cos 2(\omega t + \eta)$$

Bei der Integration ergeben sich fast nur unmerkliche periodische Glieder, das einzige der Zeit proportionale Glied

$$\delta\alpha = \frac{m_2 c_2 le}{2E} t$$

wird, wenn näherungsweise $E = m_2 c_2^2$ gesetzt wird,

$$\delta\alpha = \frac{l}{c_2} n \sin \varphi t$$

Bei dem angenommenen Werte von $\frac{l}{c_2}$ ergiebt sich, dass die Geschwindigkeit der Schwingungsebene um ein Zehntausendtel ihres Betrages vermehrt wird, wenn die bewegliche Achse unterhalb, um dasselbe Maass vermindert wird, wenn dieselbe oberhalb der festen Achse hinläuft.

20.

Wenn der Schwerpunkt des Hauptkörpers um s_2 von der Achse seines kleinsten Trägheitsmomentes entfernt liegt, ι_2 den im Sinne der wachsenden ψ zu zählenden Winkel bedeutet, den das von jenem

Schwerpunkte auf die genannte Achse gefällte Lot mit der Richtung der a-achse bildet, so sind die Glieder

$$h'' = -\frac{2gm_2 s_2}{E}\vartheta\cos(\chi+\iota_2)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = -\frac{gm_2 s_2}{E}\vartheta\sin(\chi+\iota_2)$$

in Betracht zu ziehen. Nun gilt mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$$

also

(I) $$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial h''}{\partial\psi}$$

(II) $$G = \frac{\vartheta}{2\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{dh''}{dt} - 2\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\Gamma'}{dt}\right)$$

$$= \frac{\vartheta}{2\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{\partial h''}{\partial\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} + \left[\frac{\partial h''}{\partial\psi}\frac{d\psi}{dt} - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\Gamma'}{dt}\right]\right)$$

Aber vermöge der Gleichung (I) verschwindet die in eckigen Klammern eingeschlossene Grösse. Also wird immer, wenn eine Gleichung (I) existirt,

(II) $$G = \frac{1}{2}\vartheta\frac{\partial h''}{\partial\vartheta}$$

Bei unserer Bedeutung der Grössen h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ ergiebt sich

$$G = -\frac{gm_2 s_2}{E}\vartheta\cos(\chi+\iota_2)$$

$$H = -\frac{gm_2 s_2}{E}\vartheta\sin(\chi+\iota_2)$$

Wir haben Producte, wie $\mathfrak{d}_1 s_2$, immer vernachlässigt, setzen hier also

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu$$

$$\cos(\chi+\iota_2) = \sin(\psi+\mu-\iota_2);\quad \sin(\chi+\iota_2) = \cos(\psi+\mu-\iota_2)$$

Durch Substitution dieser Werte in die Differentialgleichungen pag. 61 müssen sich Glieder ergeben, die denen von pag. 79 ganz analog sind, und aus ihnen dadurch hervorgehen, dass man $\psi+\mu-\iota_2$ statt ψ schreibt und

$$S = -\frac{gm_2 s_2}{E}\vartheta$$

setzt. Nun wird

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin(\psi+\mu-\iota_2)-\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos(\psi+\mu-\iota_2)=\vartheta\sin(M'+\mu-\iota_2)$$
$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos(\psi+\mu-\iota_2)+\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin(\psi+\mu-\iota_2)=\vartheta\cos(M'+\mu-\iota_2)$$

folglich werden, durch Substitution der auf der vorigen Seite stehenden Werte von G und H in die Differentialgleichungen, die rechten Seiten derselben homogen und linear in $\sin(\omega t+\eta)$, $\cos(\omega t+\eta)$.

Die Variationen von $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$ werden also den unmerklichen Maximalwert

$$\frac{gm_2 s_2}{gm_2 c_2}=\frac{s_2}{c_2}$$

haben, während die Ausdrücke für $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ freilich für sehr kleine Werte von ε unbrauchbar sein werden, was wiederum seinen Grund in der durch die betrachteten Glieder hervorgebrachten Veränderung der Gleichgewichtslage des Systemes hat. Wären die Glieder übrigens merklich, so würden sie von dem Winkel

$$\psi_0+\mu-\iota_2=\alpha-\Omega+\mu-\iota_2$$

abhangen, welchen die ursprüngliche Schwingungsebene mit einer Richtung bildet, die von dem aus dem Schwerpunkte auf die c-achse gefällten Lote um 90° im Sinne der abnehmenden ψ absteht, also auch von dem Winkel, den die Richtung jenes Lotes mit der ursprünglichen Schwingungsebene bildet.

21.

Den Einfluss eines Unterschiedes zwischen den beiden grösseren Hauptträgheitsmomenten ergeben die Gleichungen

$$h''=A\left\{\left(\frac{d(\vartheta\cos\chi)}{dt}\right)^2-\left(\frac{d(\vartheta\sin\chi)}{dt}\right)^2\right\}$$

$$\frac{dH'}{dt}=A\left\{\vartheta\sin\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi)+\vartheta\cos\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi)\right\}$$

Da χ von $-\psi$ nur um einen constanten Winkel verschieden ist[1]), so müssen — wenn bei der Differentiation $\mathfrak{f}$ gegen ω vernachlässigt wird — auch die Relationen

1) Natürlich bis auf Grössen zweiter Ordnung, die wir vernachlässigen.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi) = -\omega^2\vartheta\cos\chi; \quad \frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi) = -\omega^2\vartheta\sin\chi$$

statt haben; da aber

$$\frac{dh''}{dt} = 2A\left\{\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\chi)\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi) - \frac{d}{dt}(\vartheta\sin\chi)\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi)\right\}$$

ist; so folgt hieraus

$$\frac{dh''}{dt} = -2A\omega^2\left(\vartheta\cos\chi\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\chi) - \vartheta\sin\chi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\chi)\right)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = -A\omega^2\vartheta^2\sin 2\chi = H$$

$$G = \frac{\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dt}}\left(-A\omega^2(\vartheta\cos^2\chi - \vartheta\sin^2\chi)\frac{d\vartheta}{dt} + 2A\omega^2\vartheta^2\sin\chi\cos\chi\frac{d(\chi+\psi)}{dt}\right)$$

Nun ist $\frac{d}{dt}(\chi+\psi)$ eine Grösse zweiter Ordnung, also wird

$$G = -A\omega^2\vartheta^2\cos 2\chi$$
$$H = -A\omega^2\vartheta^2\sin 2\chi$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in die allgemeinen Differentialgleichungen pag. 61 muss auf der rechten Seite Ausdrücke hervorbringen, die aus denen der Differentialgleichungen von pag. 79 oben hervorgehen, wenn man $\frac{\pi}{2} - 2\chi$ für ψ schreibt und

$$S = -A\omega^2\vartheta^2$$

setzt. Sodann ergiebt sich auf die mehrfach erwähnte Art

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2\chi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2\chi = -\vartheta\cos(\psi+M'+2\mu)$$
$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2\chi + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2\chi = +\vartheta\sin(\psi+M'+2\mu)$$

und auf ähnliche Weise

$$\vartheta\cos(\psi+M'+2\mu) = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu)$$
$$\vartheta\sin(\psi+M'+2\mu) = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu)$$

Die Differentialgleichungen pag 79 ergeben also:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\omega\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu))$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -A\omega\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu))$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\Delta\omega\varepsilon}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu))$$

$$-\frac{\Delta\omega\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu))$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Delta\omega\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu))$$

$$+\frac{\Delta\omega\varepsilon}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu))$$

und bei Ausführung der Integration unter Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω erhält man:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon'\Delta\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 2(M'+\mu) - \cos 2(\psi_0+\mu))$$

$$-\frac{\Delta}{2}\sin\omega t(\varepsilon\sin\omega t\cos 2(M'+\mu) + \varepsilon'\cos\omega t\sin 2(M'+\mu))$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{\varepsilon\Delta\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 2(M'+\mu) - \cos 2(\psi_0+\mu))$$

$$-\frac{\Delta}{2}\sin\omega t(\varepsilon\cos\omega t\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin\omega t\cos 2(M'+\mu))$$

$$\delta\eta = -\frac{\Delta\omega}{4\mathfrak{f}}\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}(\sin 2(M'+\mu) - \sin 2(\psi_0+\mu))$$

$$+\Delta\sin\omega t\left(\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin\omega t\sin 2(M'+\mu) - \cos\omega t\cos 2(M'+\mu)\right)$$

$$\delta\alpha = \frac{\Delta\omega\varepsilon\varepsilon'}{2\mathfrak{f}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\sin 2(M'+\mu) - \sin 2(\psi_0+\mu)) + \frac{\Delta\omega}{2}\sin^2\omega t\sin 2(M'+\mu)$$

wo $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$ zur Zeit $t = t_0 = 0$ oder für $\eta = 0$ null werden. Eine Reihe von Gliedern werden wieder für den Fall $\varphi = 0$ ungültig, für den dann Reihenentwickelungen vorzunehmen wären. Die Grösse

$$\Delta = \frac{A-B}{A+B}$$

wird, da die a-achse die des grössten Hauptträgheitsmomentes sein sollte, wesentlich positiv sein, sie wird von der Beschaffenheit der Linse abhangen, ob diese homogen und präcise gearbeitet ist. Kaum wird Δ grösser als ein Hunderttausendtel sein, weil ja in A und B gleichzeitig das wirksamste Glied $m_2 c_2^2$ ist. Für diesen Wert ist

$$\frac{\Delta\omega}{4\mathfrak{f}} = \frac{13714\pi}{400000}\operatorname{cosec}\varphi = 0{,}1077\operatorname{cosec}\varphi$$

wenn man annimmt, dass das Pendel ein Secundenpendel ist. Und dann würde das Maximum von $\delta\alpha$ für $\sin 2(\psi_0+\mu)=0$ und $\varepsilon=\frac{1}{9}$

$$\delta\alpha_M = 17{,}44\,\varepsilon\varepsilon'\operatorname{cosec}\varphi$$

also würden diese Störungen immerhin für solche Werte von ε' merklich sein, die das Hauptglied

$$\tfrac{3}{8}\,\omega\varepsilon\varepsilon' t$$

zur Erscheinung kommen lassen.

Die Variationen hangen von dem Winkel $(\psi_0+\mu)$ oder auch von $90^0-\psi_0-\mu$, d. h. von dem Winkel ab, unter dem die a-achse in der Ruhelage gegen die anfängliche Schwingungsebene geneigt ist.

Jedenfalls erscheint bei Anfertigung der Linse die grösste Sorgfalt in Beziehung auf Form und Homogeneität geboten.

22.

Der Neigungswinkel ν der beweglichen Achse gegen die Ebene der $a-b$ erscheint in den Formeln mit der Grösse $\frac{C}{E}$ multiplicirt, deren Maximum wir auf 0,001 taxirt haben; wenn also ν ungefähr $\frac{1}{4}{}^0$ beträgt — was sicherlich ein der Vollkommenheit der Technik nicht entsprechender Wert sein wird — so wird schon

$$\frac{C}{E}\nu = 0{,}00001$$

Die Wirkung des Fehlers muss also schon deshalb sehr gering sein. Die vorerst zu berücksichtigenden Glieder sind

$$h'' = \frac{2C}{E}\nu\vartheta\cos\psi\,\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\cdot\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{C}{E}\nu\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\left(\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}-\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)$$
$$+\frac{C}{E}\nu\vartheta\cos\psi\left(\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\psi)-\vartheta\sin\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)\right)$$

Da nun bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω

(I) $$\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\psi) = -\omega^2\vartheta\cos\psi;\quad \frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) = \omega^2\vartheta\sin\psi$$

und ausserdem

$$\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}-\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)=\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)$$

ist, und ferner aus (I) folgt

$$2\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\cdot\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\psi)=-2\omega^2\vartheta\cos\psi\cdot\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)$$

$$\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\right)^2=-\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi+F(M')$$

wo $F(M')$ eine uns nicht weiter interessirende Function von M' allein bedeutet, so ergiebt sich

$$\frac{dh''}{dt}=2\frac{C}{E}\nu\left\{\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\left(\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)^2-\omega^2\vartheta\cos\psi(\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\right.$$
$$\left.+\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi))\right\}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt}=\frac{C}{E}\nu\left\{\left(\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)^2\vartheta\cos\psi-(\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi-\omega^2\vartheta^2\sin^2\psi).\vartheta\cos\psi\right\}$$

$$\frac{dh''}{dt}=\frac{2C}{E}\nu\left\}-2\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)-\omega^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\frac{d}{dt}\vartheta\cos\psi\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi).F(M')\right\}$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt}=\frac{C}{E}\nu(-2\omega^2\vartheta^3\cos^3\psi+\omega^2\vartheta^3\sin^2\psi\cos\psi+F(M')\vartheta\cos\psi)$$

Demnach wird

$$G=\frac{\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dt}}\cdot\frac{C}{E}\nu\left\{\left(-2\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi+F(M')\right)\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)-\vartheta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right)\right.$$
$$\left.-\omega^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)+\vartheta\sin\psi\frac{d\psi}{dt}\right)\right\}$$

$$G=\frac{C}{E}\nu\left\{-3\omega^2\vartheta^3\sin\psi\cos^2\psi+F(M')\vartheta\sin\psi\right\}$$

$$H=\frac{C}{E}\nu\left\{-3\omega^2\vartheta^3\cos^3\psi+\omega^2\vartheta^3\cos\psi+F(M')\vartheta\cos\psi\right\}$$

Von dem in H allein vorkommenden Gliede

$$\frac{C}{E}\nu\,\omega^2\vartheta^3\cos\psi$$

erkennt man auf oberflächliche Betrachtung, dass bei seiner Substitution in die allgemeinen Differentialgleichungen pag. 61 der Nen-

ner ϑ^2 sich forthebt, und die rechten Seiten sich vermöge des pag. 68 gegebenen Ausdrucks von $\vartheta\cos\psi$ als homogene Functionen ungeraden Grades von $\sin(\omega t+\eta)$, $\cos(\omega t+\eta)$ darstellen lassen, also integrirt durchaus unmerkliche Variationen liefern. Die andern Glieder von G und H lassen sich auf die Form

$$G = S\sin\psi \qquad H = S\cos\psi$$

bringen, wo

$$S = \frac{C}{E}\nu\left\{-3\omega^2\vartheta^3\cos^2\psi + F(M')\vartheta\right\}$$

gesetzt ist. Also sind die Differentialgleichungen pag. 79 unten anwendbar, und man erkennt, dass nach Forthebung von ϑ die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen sich wieder als homogene Functionen ungeraden positiven Grades in $\sin(\omega t+\eta)$, $\cos(\omega t+\eta)$ darstellen lassen, die Integration also nur völlig unbeträchtliche Terme liefern kann.

Indessen kommt in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ noch das Glied

$$\nu\frac{C}{2E}n\cos\varphi\sin\mathfrak{A}\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

vor. Dasselbe ist von der Form eines auf pag. 85 betrachteten Gliedes, und da dieses von merklichen Termen nur einen der Zeit proportionalen in $\delta\alpha$ geliefert hat, so können wir direct schliessen, dass das oben hingeschriebene Glied als einzig wahrnehmbare Störung

$$\delta\alpha = \frac{\nu C}{4E}n\cos\varphi\sin\mathfrak{A}t$$

liefern muss. Aber selbst dieses Glied würde, wenn das Pendel einen ganzen Tag am Aequator schwingen würde und so aufgehängt wäre, dass

$$\mathfrak{A} = \pm 1$$

ist, d. h. dass die feste Achse von Westen nach Osten aufgelagert ist, bei den angenommenen Maximalwerten von $\frac{C}{E}$ und ν nur eine schliessliche Abweichung von 3″,2 ergeben. Ein Fehler ν in der Lage der beweglichen Achse gegen die Ebene der beiden grössten Hauptträgheitsmomente wird also, wenn sein Wert $\frac{1}{7}{}^0$ nicht überschreitet, sicher nicht zur Erscheinung kommen — es wäre denn in Gliedern die ausser ν noch eine andere kleine Grösse zum Factor haben.

23.

Um den Einfluss einer geringen Neigung der festen Achse gegen den Horizont auf die Bewegung des Apparates zu untersuchen, gehen wir von den Gleichungen

$$h'' = -\frac{2g\,m_2\,c_2}{E}\,i\vartheta\cos\psi = -2\omega^2 i\vartheta\cos\psi$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \omega^2 i\vartheta\sin\psi + n\cos\varphi\cos\mathfrak{A}i\left(1-\frac{C}{2E}\right)\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

aus, von denen das letzte Glied in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ mit dem eben betrachteten Gliede in der Form übereinstimmt. Dieses Glied liefert als merkliche Störung nur

$$\delta\alpha = n\cos\varphi\,\cos\mathfrak{A}i\left(1-\frac{C}{2E}\right)t,$$

wegen der es sich empfehlen wird jene Neigung i so gering als möglich zu machen, die feste Achse aber weitest von Westen nach Osten aufzulegen, damit der absolute Wert von $\cos\mathfrak{A}$ klein bleibe.

Da zwischen den Gliedern

$$h'' = -2\omega^2 i\,\vartheta\cos\psi;\quad \frac{d\Gamma'}{dt} = \omega^2 i\vartheta\sin\psi$$

die Relation

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial h''}{\partial\psi}$$

stattfindet, so ergibt sich nach pag. 86

$$G = \tfrac{1}{2}\vartheta\frac{\partial h''}{\delta\vartheta} = -\omega^2 i\vartheta\cos\psi$$

$$H = \frac{dI''}{dt} = \omega^2 i\vartheta\sin\psi$$

und die Differentialgleichungen müssen aus den pag. 79. gegebenen hervorgehen, wenn man

$$S = \omega^2 i\vartheta$$

setzt und für

$$\sin\psi \text{ resp. } \cos\psi$$
$$-\cos\psi \text{ resp. } \sin\psi$$

schreibt. Man erhält so die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega i \sin(\omega t + \eta) \cos M'$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \omega i \cos(\omega t + \eta) \sin M'$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\omega i \varepsilon}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos(\omega t + \eta) \cos M' + \frac{\omega i \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin(\omega t + \eta) \sin M'$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega i \varepsilon}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos(\omega t + \eta) \sin M' - \frac{\omega i \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin(\omega t + \eta) \cos M'$$

Die Integration gibt bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω und passender Bestimmung der Constanten

$$\delta\varepsilon = -i \cos M' (\cos \omega t - 1)$$

$$\delta\varepsilon' = i \sin M' \sin \omega t$$

$$\delta\eta = \frac{\varepsilon i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos M' \sin \omega t - \frac{\varepsilon' i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin M' (\cos \omega t - 1)$$

$$\delta\alpha = \frac{\varepsilon i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin M' (\cos \omega t - 1) - \frac{\varepsilon' i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos M' \sin \omega t.$$

Diese Glieder sind für kleine Werte von i unmerklich; die Ausdrücke für $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ werden freilich für kleine Werte von ε unbrauchbar, aber das kommt daher, dass wir bisher die c-achse als in der Ruhelage mit der w-achse zusammenfallend angesehen haben, während sie vielmehr mit der ζ-achse zusammenfällt. Das wird sich bei der späteren Untersuchung der Gleichgewichtslage zeigen.

24 [1]).

Wir haben von der vorhergehenden Betrachtung die sogenannten Störungen zweiter Ordnung ausgeschlossen. Dass sie teilweise nicht unbeträchtlich sind, lässt sich folgendermassen einsehen:

Die beträchtlichsten Störungen sind von uns durch Integration der Differentialgleichungen [2])

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{3}{8}\omega\varepsilon\varepsilon' \end{aligned}\right\}$$

1) Hansen a. a. O. pag. 58 f.

2) vgl. pag. 61. und 65. unten.

gefunden worden, indem rechter Hand ε und ε' als constant angesehen wurden. Das ist strenge genommen nicht richtig, wir haben vielmehr zur Ergänzung nach Variation der rechten Seiten in die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{8}(\varepsilon\delta\varepsilon + \varepsilon'\delta\varepsilon')$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{3}{8}\omega(\varepsilon\delta\varepsilon' + \varepsilon'\delta\varepsilon)$$

die im Laufe der Untersuchung erhaltenen Variationen von ε und ε' einzusetzen [1]). Substituirt man z. B. die pag. 81. erlangten Variationen, und zwar nur die wegen des Nenners $\mathfrak{f}$ bedeutendsten Glieder derselben, so erhält man

$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3\omega'^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}{64\,\mathfrak{f}}(\cos 2M' - \cos 2\psi_0)$$

und hieraus durch Integration und passende Wahl der Constanten

$$\delta\eta = 0;$$

$$\delta\alpha = \frac{3\omega'^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}{64\,\mathfrak{f}}\cos 2\psi_0 t - \frac{3\omega'^2}{128\,\mathfrak{f}^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)(\sin 2M' - \sin 2\psi_0)$$

Wenn hier auch das erste Glied durch passende Wahl von ψ_0 zum Verschwinden gebracht werden kann, so ist der zweite Term wegen der Factors $\mathfrak{f}^2$ im Nenner doch fähig die Bewegung sehr zu modificiren. Glieder von ähnlicher Natur und ebenso beträchtlicher Grösse — wie wir sie eben als Wirkung des ersten, mitschwingenden, Körpers erkannt haben — werden erhalten, wenn man in die auf der vorigen Seite unten stehenden Differentialgleichungen die der cardanischen Aufhängung entstammenden Variationen von pag. 70. einsetzt — oder die Variationen $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$, die in Abschnitt 19. betrachtet sind und von der Existenz eines geringen Abstandes zwischen den Achsen der cardanischen Aufhängung herrühren, — oder die Variationen, die ein geringer Unterschied zwischen den beiden grösseren Hauptträgheitsmomenten erzeugt.

25.

Wenn der Apparat absolut vollkommen gearbeitet wäre, so fiele der Schwerpunkt in die Achse des kleinsten Trägheitsmoments, diese

1) cf. die oberflächlichen Betrachtungen pag. 70. f., 82., 84. und 89.

in der Ruhelage in die Verticale , und ebenso fiele die w-achse — da $t = 0$ wäre — in die Verticale; somit wäre in der Ruhelage $\vartheta = 0$. Der Apparat schwingt jedenfalls um die Richtung der Schwerkraft, und wenn wir den Wert ϑ' finden können, den ϑ in der Ruhelage hat, so haben wir den Winkel bestimmt, den jene Richtung — wenn der Schwerpunkt in der c-achse läge — mit dieser bildet. Wir werden den Winkel ϑ' ohne die letzte Voraussetzung berechnen.

Um ϑ' und ψ' — den Wert von ψ in der Ruhelage — zu finden, suchen wir [1]) die Maximalbedingungen des Ausdruckes

$$U = -\frac{2gm_2c_2}{E} i\vartheta\cos\psi - \frac{2gm_2c_2}{E}\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{2gm_2s_2}{E}\vartheta\sin(\psi+\mu-\iota_2)$$
$$+\frac{2gm_1s_1}{E}\vartheta\sin\psi\sin\iota_1$$

welcher bis auf einige — hier weggelassene — kleine Glieder, die im Endresultate nur Producte kleiner Werte liefern würden, mit dem Ausdrucke rechter Hand in Gleichung (23) pag. 42. übereinstimmt. Differentiirt man diesen Ausdruck, nachdem man ihn durch $-\frac{2gm_2c_2}{E}$ dividirt hat, nach ϑ und ψ, so erhält man als Gleichungen für ϑ' und ψ'

$$\text{(I)} \quad i\cos\psi'\vartheta' + \frac{s_2}{c_2}\sin(\psi'+\mu-\iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\vartheta'\sin\psi'\sin\iota_1 = 0$$

$$\text{(II)} \quad -i\sin\psi'\vartheta' + \frac{s_2}{c_2}\vartheta'\cos(\psi'+\mu-\iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\vartheta'\cos\psi'\sin\iota_1 = 0.$$

Die zweite Gleichung wird nach Division durch $\vartheta'\cos\psi'$ und Auflösung von $\cos(\psi'+\mu-\iota_2)$ in tang ψ' linear und ergibt

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu-\iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\sin\iota_1}{\frac{s_2}{c_2}\sin(\mu-\iota_2) + i}$$

$$\sin\psi' = \frac{1}{N}\left(\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu-\iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\sin\iota_1\right)$$

$$\cos\psi' = \frac{1}{N}\left(i + \frac{s_2}{c_2}\sin(\mu-\iota_2)\right)$$

wo

1) Abweichend von Hansen, der pag. 55. a. a. O. einen anderen Weg einschlägt.

$$N = \sqrt{\left(\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu-\iota_2) - \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1\right)^2 + \left(\frac{s_2}{c_2}\sin(\mu-\iota_2)+i\right)^2}$$

gesetzt ist. Setzt man diese Werte in die Gleichung (I) ein, so erhält man nach einiger Reduction

$$\vartheta' = -N.$$

Durch ϑ' und ψ' ist die Gleichgewichtslage bestimmt. Speciel wird

1) für $\frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1 = 0,\ \frac{s_2}{c_2} = 0$

$$\vartheta' = i;\quad \operatorname{tang}\psi' = 0$$

2) für $\frac{s_2}{c_2} = 0,\quad i = 0$

$$\vartheta' = \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1;\quad \operatorname{tang}\psi' = -\alpha$$

3) für $i = 0,\quad \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1 = 0$

$$\vartheta' = \frac{s_2}{c_2},\quad \operatorname{tang}\psi' = \operatorname{cotg}(\mu-\iota_2).$$

In der pag. 52. definirten xy-ebene hat der Punkt, um den das Pendel schwingt — wie leicht zu sehen ist — die Coordinaten

$$x_0 = -i - \frac{s_2}{c_2}\sin(\mu-\iota_2)$$

$$y_0 = -\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu-\iota_2) + \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1.$$

26.

Das der Untersuchung bisher zu Grunde gelegte System der u, v, w eignet sich nicht, um darin Beobachtungen anzustellen. Zu diesen wird man im allgemeinen sich des zuerst eingeführten Systemes der ξ, η, ζ bedienen und in Beziehung auf dasselbe die Coordinaten eines im Pendel festen Punktes a', b', c', der der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes nahe liegen wird, in's Auge fassen. Die Transformation der Coordinaten geschieht durch die Gleichungen (2) pag. 5. und pag. 9. mit Rücksicht auf die Ausdrücke der u_1, u_2, u_3 etc. und der α_1, β_1, γ_1 etc. Man gelangt dabei schliesslich — bei Vernachlässigung der Producte von a' und b' mit andern kleinen Werten — zu den Gleichungen

$$\xi = -l \sin \mathfrak{A} \vartheta \sin \psi + a' \sin (\mu - \mathfrak{A}) - b' \cos (\mu - \mathfrak{A}) + c' \sin \vartheta \cos (\psi + \mathfrak{A}) + c' i \cos \mathfrak{A}$$

$$\eta = l \cos \mathfrak{A} \vartheta \sin \psi + a' \cos (\mu - \mathfrak{A}) + b' \sin (\mu - \mathfrak{A}) + c' \sin \vartheta \sin (\psi + \mathfrak{A}) + c' i \sin \mathfrak{A}$$

$$\zeta = l - a' \vartheta \cos \chi + b' \vartheta \sin \chi + c' \cos \vartheta - i c' \vartheta \cos \psi.$$

Da ζ im Verhältniss zu den anderen Coordinaten geringen Aenderungen unterworfen ist, so eignen sich zur Beobachtung nur ξ und η.

Um die Variationen dieser Grössen zu erhalten, hat man in die Ausdrücke der ξ und η die im Laufe der Untersuchung erlangten Werte der $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ einzusetzen; und, da wir Producte kleiner Grössen vernachlässigen, so ist diese Substitution nur in

$$\xi_1 = c' \sin \vartheta \cos (\psi + \mathfrak{A})$$
$$\eta_1 = c' \sin \vartheta \sin (\psi + \mathfrak{A})$$

nötig; da wir in den Störungsgliedern aber nur die beiden niedrigsten Potenzen von ϑ berücksichtigen, so hat man einfach

$$\xi^0{}_1 = c' \vartheta \cos (\psi + \mathfrak{A})$$
$$\eta^0{}_1 = c' \vartheta \sin (\psi + \mathfrak{A})$$

zu variiren nach ε, ε', η und α [1]). Setzt man in die entstehenden Gleichungen z. B. die durch den Fehler i bewirkten Variationen pag. 94. ein, so müssen sich – wie a priori klar ist — die Glieder $c' i \cos \mathfrak{A}$ und $c' i \sin \mathfrak{A}$ in ξ und η wieder fortheben.

Die Resultate der ersten Näherung stimmen mit Rücksicht auf die durch die Erdrotation bewirkte Drehung einer im Pendelkörper festen Ebene mit Hansen's Ergebnissen überein.

Von den Hauptgliedern der zweiten Näherung erscheint das Hansen'sche Störungsglied $\frac{1}{24} \omega \varepsilon \varepsilon' t$ der Bewegung der sogenannten Schwingungsebene bei uns vereinfacht — was auf ein Versehen von Hansen zurückzuführen ist.

1) Dabei ergeben sich genau die Ausdrücke von Hansen a. a. O. pag. 55. bis auf den hier hinzugefügten Factor c'.

Eine durch durch die cardanische Aufhängung erzeugte periodische Ungleichheit in der eben erwähnten Bewegung [1]) wird nur für verhältnissmässig grosse Werte von $\frac{C}{E}$, eine dadurch hervorgebrachte Veränderung der Schwingungsdauer wol niemals merklich sein. Die grösste Herabdrückung des Verhältnisses $\frac{C}{E}$ erscheint geboten.

Störungen, dadurch entstehend, dass die Achsen der Aufhängung sich nicht genau rechtwinklig schneiden, oder dass die bewegliche Achse mit den Achsen der grösseren Hauptträgsheitsmomente nicht genau in eine Ebene fällt, oder dass die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes in der Nähe Schwerpunktes vorbei geht, ihn nicht enthält, haben sich nur völlig unmerklich er ergeben.. Der Umstand, dass an der Bewegung ein Körper von geringer Masse beteiligt ist, oder dass die Achsen der Aufhängung einen geringen Abstand haben, erzeugt periodische — vielleicht nicht unbeträchtliche — Variationen in der Bewegung der Schwingungsebene [1]), der letztere Umstand bringt aber auch eine der Zeit proportionale Aenderung derselben hervor, deren Wahrnehmbarkeit zweifelhaf bleibt, während beide Umstände die Schwingungsdauer modificiren.

Ein Unterschied zwischen den beiden grösseren Hauptträgheitsmomenten erzeugt periodische Störungen in der Bewegung der Schwingungsebene, die aber nur bei einiger Beträchtlichkeit des Fehlers zu beobachten sein dürften [2]).

Wegen einer durch das Vorhandensein einer geringen Neigung der festen Achse gegen die Horizontalebene erzeugten der Zeit proportionalen Variation der Bewegung der Schwingungsebene erscheint es vorteilhaft diesen Fehler weitest herabzudrücken und die genannte Achse von Westen nach Osten aufzulagern.

Einige durch Variation der Constanten gefundene sehr beträchtliche Störungen zweiter Ordnung [3]) lassen vermuten, dass die Art und Weise, in welcher jene Methode angewendet wurde, für eine weitere Behandlung des Problems nicht brauchbar sein wird.

---

1) Dieselbe ist eine Störung zweiter Ordnung (cf, pag. 70 f., 95 f,).

2) cf. die Bemerkung der vorigen Seite.

3) Es sind die in den Anmerkungen 1) dieser Seite betrachteten.

Lebenslauf.

Verfasser, Heinrich Samter, mosaischer Confession, geboren am 7. September 1862 zu Grünberg in Schlesien als Sohn des Predigers der dortigen Synagogengemeinde, Dr. Leopold Samter, besuchte das Realgymnnasium seiner Vaterstadt von Ostern 1870 an, und bezog Ostern 1879 mit dem Zeugnisse der Reife die Universität zu Berlin. Dort widmete er sich acht Semester dem Studium der Mathematik, Physik und Astronomie und hörte in dieser Zeit Vorlesungen bei den Herren Professoren Bruns, Eichler, Förster, von Helmholtz, Kirchhoff, Kronecker, Kummer, Paulsen, Peters, Tietjen, Weierstrass und Zeller. Physikalische Uebungen machte er unter Leitung des Herrn Professor Paalzow im physikalischen Laboratorium der Kgl. technischen Hochschule. Dem[illegible]tischen S[illegible]
zur Aus[illegible]
als Mit[illegible]

D[illegible]
schaf[illegible]
Da[illegible]

Bruns, Förster und Tietjen, die die Uebungen des Rechenseminares leiteten.

Am 18. und 19. Februar 1884 bestand er vor der Kgl. Wissenschaftlichen Prüfungs-Kommisson zu Berlin die Prüfung pro facultate docendi. Von Ostern 1884 bis dahin 1885 absolvirte er das Probejahr am Realgymnasium seiner Vaterstadt.